



دانشگاه شهید چمران اهواز

دانشکده مهندسی علوم آب

گروه آموزشی سازه های آبی

جزوه درسی

هیدرودینامیک

دوره کارشناسی ارشد سازه های آبی

مهدی قمشی

۱۳۸۴

هیدرو دینامیک

مباحث

۱- مختصری از ریاضیات مورد نیاز

۲- معادلات دیفرانسیلی حرکت سیال

(۲-۱) خطوط جریان

(۲-۲) حرکت سیال

- شتاب یک ذره سیال

- چرخش سیال

- تغییر شکل سیال

(۲-۳) معادله مومنتم ← معادلات ناویراستوکس

۳- مقدمه ای بر جریان های توربولانت

۴- جریان سیال ایده آل

۴-۱- معادله اولر در حرکت سیال

۴-۲- معادله برنولی

۴-۳- جریان غیر چرخشی

۴-۴- پتانسیل سرعت

۴-۵- الگوهای جریان دو بعدی

۵- جریان بیرونی غیر قابل تراکم سیال حقیقی

(۵-۱) لایه های مرزی

(۵-۲) جریان سیال در اطراف اجسام شناور

منابع

- ۱- جزوه درسی هیدرودینامیک مهدی قمشی
۲- کتاب ۱۰۰۰ مسئله حل شده مکانیک سیالات و هیدرولیک
نوشتۀ سوبرامانیا - ترجمه دکتر مهدی قمشی

۳-Introduction to fluid Mechanics Fox & McDonald

۴-Fluid Mechanics Streeter, wylie & Bedford

۵-Fluid Mechanics Franzini & Finneman

۶-Mechanics of Fluids Massey

۷-Fluid Mechanics Shames

**8- A physical introduction to Fluid Mechanics
A. J. Smits**

9-Introduction to fluid W. Janna

10-Mechanics of Fluids M. C. Potter & D. C. Wiggert

مختصری از ریاضیات مورد نیاز

مختصات کارتیزین و استوانه ای

کارتیزین

$$\nabla = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\nabla \phi = \text{grad} \phi = \vec{i} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial \phi}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

استوانه ای

$$\nabla = \vec{i}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{i}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\nabla F = \vec{i}_r \frac{\partial F}{\partial r} + \vec{i}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta} + \vec{k} \frac{\partial F}{\partial z}$$

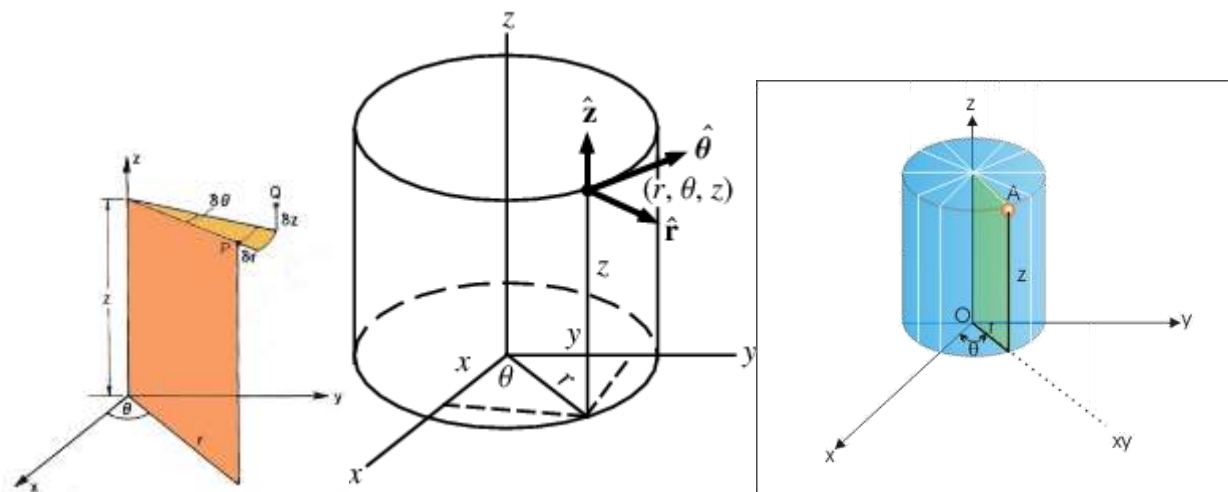
در مختصات کارتیزین چنانچه بردار فاصله جزء کوچکی مانند ds در نظر گرفته شود

$$ds = dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k}$$

در مختصات استوانه ای

$$ds = dr \vec{i}_r + r d\theta \vec{i}_\theta + dz \vec{k}$$

روابط مختصات استوانه ای و کارتیزین



در مختصات کارتیزین (x,y,z) اجزاء می شوند

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$z = z,$$

که در آن $z \in (-\infty, \infty)$, $\theta \in [0, 2\pi)$, $r \in [0, \infty)$ خواهند شد

$$x = r \cos \theta$$

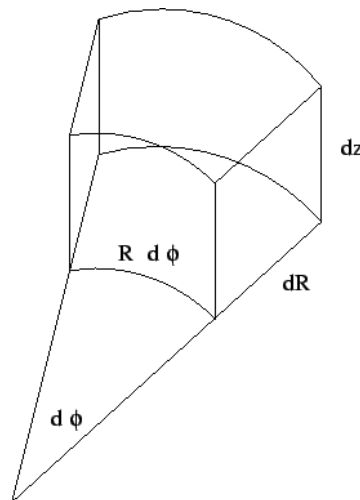
$$y = r \sin \theta$$

$$z = z,$$

معادله یک خط خواهد شد

$$d\mathbf{s} = dr \hat{\mathbf{r}} + r d\theta \hat{\boldsymbol{\theta}} + dz \hat{\mathbf{z}},$$

$$dV = r dr d\theta dz$$



معادله یک حجم خواهد شد

یک بردار کارتزین با مختصات استوانه ای خواهد شد

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \\ z \end{bmatrix}.$$

برای پیدا کردن بردارهای یکه داریم
(مشتق بردار تقسیم بر طول بردار)

$$\hat{\mathbf{r}} \equiv \frac{\frac{d\mathbf{r}}{dr}}{\left|\frac{d\mathbf{r}}{dr}\right|} = \frac{\begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{bmatrix}}{1} = \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left|\frac{d\mathbf{r}}{dr}\right| = \sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} = 1 \quad \frac{d\mathbf{r}}{dr} = \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\frac{d\mathbf{r}}{d\theta}}{\left|\frac{d\mathbf{r}}{d\theta}\right|} = \begin{bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left|\frac{d\mathbf{r}}{d\theta}\right| = \sqrt{r^2 \sin^2 \theta + r^2 \cos^2 \theta + 0^2} = r \quad \frac{d\mathbf{r}}{d\theta} = \begin{bmatrix} -r \sin \theta \\ r \cos \theta \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\theta} \equiv$$

$$\hat{z} \equiv \frac{\frac{d\mathbf{r}}{dz}}{\left| \frac{d\mathbf{r}}{dz} \right|} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

استخراج بردار های یکه نسبت به مختصات خواهند شد

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial r} &= \mathbf{0} & \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial r} &= \mathbf{0} & \frac{\partial \hat{z}}{\partial r} &= \mathbf{0} \\ \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \theta} &= -\hat{\mathbf{r}} & \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \theta} &= -\hat{\mathbf{r}} & \frac{\partial \hat{z}}{\partial \theta} &= \mathbf{0} \\ \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial z} &= \mathbf{0} & \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial z} &= \mathbf{0} & \frac{\partial \hat{z}}{\partial z} &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

$$\hat{\mathbf{r}} = \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{bmatrix} \quad \frac{\partial \hat{\mathbf{r}}}{\partial \theta} = \begin{bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{bmatrix} = \hat{\theta}$$

بردار گرادیان در مختصات استوانه ای خواهد شد

$$\nabla \equiv \hat{\mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z},$$

بنابراین مولفه های گرادیان خواهند شد

$$\nabla_r \hat{\mathbf{r}} = \mathbf{0}$$

$$\nabla_\theta \hat{\mathbf{r}} = \frac{1}{r} \hat{\theta}$$

$$\nabla_r \hat{\theta} = \mathbf{0}$$

$$\nabla_\theta \hat{\theta} = -\frac{1}{r} \hat{\mathbf{r}}$$

$$\nabla_z \hat{\theta} = \mathbf{0}$$

ضرب خارجی بردارهای یکه خواهند شد

$$\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{z}} = -\hat{\theta}$$

$$\hat{\theta} \times \hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{r}}$$

$$\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\theta} = \hat{\mathbf{z}}$$

ضرب اسکالر

Dot product

یا ضرب نقطه ای

Inner product

یا ضرب داخلی

مثال

$$\vec{A} \cdot \vec{B} \quad \begin{aligned} A &= 2\vec{i} + 3\vec{j} \\ B &= a\vec{i} + b\vec{j} \end{aligned}$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = 2(a) + 3(b)$$

$$A = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j}$$

$$B = x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j}$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = x_1 x_2 + y_1 y_2$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$$

ضرب داخلی

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \cos \theta$$

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}$$

ضرب خارجی = ضرب برداری

Cross Product

$$A = a_1 \vec{i} + b_1 \vec{j} + c_1 \vec{k}$$

$$B = a_2 \vec{i} + b_2 \vec{j} + c_2 \vec{k}$$

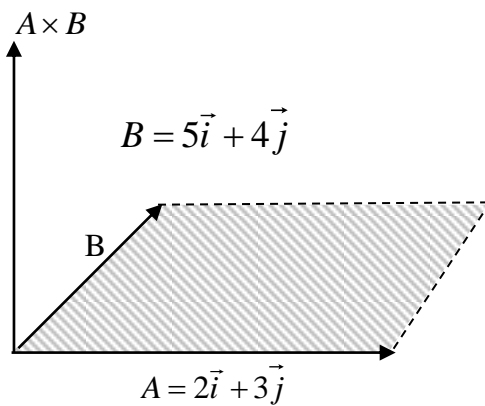
$$A \times B = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \overset{(-1)^{\text{column}+\text{row}=2} = 1}{\vec{i}} \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} + \overset{(-1)^{\text{column}+\text{row}=3} = -1}{\vec{j}} \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

دترمینان

تعریف دترمینان 2×2

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

از نظر عددی، طول بردار $A \times B$ برابر است با عدد مساحت متوازی الاضلاعی که بر روی A و B ساخته می شود.



$$V = u\vec{i} + v\vec{j}$$

$$dr = \vec{i} dx + \vec{j} dy$$

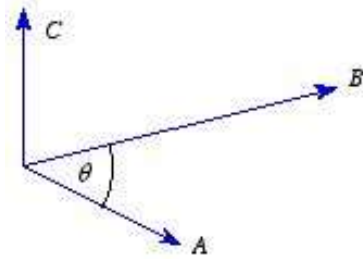
$$V \times dr = (u\vec{i} + v\vec{j}) \times (\vec{i} dx + \vec{j} dy)$$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u & v & 0 \\ dx & dy & 0 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} v & 0 \\ dy & 0 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} u & 0 \\ dx & 0 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} u & v \\ dx & dy \end{vmatrix} = \vec{k} (udy - vdx)$$

$$|\vec{C}| = |\vec{A} \times \vec{B}| = |A||B|. \sin \theta$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$$

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C} = \vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$$



$$\begin{aligned} \vec{A} \times \vec{B} &= (A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}) \times (B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k}) = \\ &= A_x B_y (\hat{i} \times \hat{j}) + A_y B_x (\hat{j} \times \hat{i}) + A_x B_z (\hat{i} \times \hat{k}) + \\ &\quad + (A_z B_x - A_x B_z) (\hat{i} \times \hat{k}) + \\ &\quad + (A_y B_z - A_z B_y) (\hat{j} \times \hat{k}) = \\ &= (A_y B_z - A_z B_y) \hat{i} + (A_z B_x - A_x B_z) \hat{j} + (A_x B_y - A_y B_x) \hat{k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{i} \times \hat{i} &= \hat{j} \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{k} = 0 \\ \hat{i} \times \hat{j} &= -\hat{j} \times \hat{i} = \hat{k} \\ \hat{j} \times \hat{k} &= -\hat{k} \times \hat{j} = \hat{i} \\ \hat{k} \times \hat{i} &= -\hat{i} \times \hat{k} = \hat{j} \end{aligned}$$

ضرب بردارها

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

اعمال ضرب با ∇

$$\nabla(fg) = f \cdot \nabla g + g \cdot \nabla f$$

f و g توابعی اسکالر هستند

$$\nabla(\vec{A} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \times (\nabla \times \vec{B}) + \vec{B} \times (\nabla \times \vec{A}) + (\vec{A} \cdot \nabla)\vec{B} + (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{A}$$

A و B توابعی برداری هستند

$$\nabla \cdot (f\vec{A}) = f(\nabla \cdot \vec{A}) + \vec{A} \cdot \nabla f$$

f تابعی اسکالر و A تابعی برداری است

$$\nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{B})$$

A و B توابعی برداری هستند

$$\nabla \times (f\vec{A}) = f(\nabla \times \vec{A}) + \vec{A} \times \nabla f$$

f تابعی اسکالر و A تابعی برداری است

$$\nabla \times (\vec{A} \times \vec{B}) = (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{A} - (\vec{A} \cdot \nabla)\vec{B} + \vec{A}(\nabla \cdot \vec{B}) - \vec{B}(\nabla \cdot \vec{A})$$

A و B توابعی برداری هستند

ضرب سه بردار

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$$

ضرب داخلی

$$\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$$

ضرب خارجی

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \cdot \mathbf{u} = (\mathbf{w} \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$$

$$\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w}$$

$$\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \neq (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w}$$

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})\mathbf{u}$$

عملگرهای برداری مهم

۱- عملگر برداری $\vec{\nabla}$ (the vector operator ∇)

۲- دیورجانس $\vec{\nabla} \cdot \vec{V}$ (The Divergence)

۳- کرل $\vec{\nabla} \times \vec{V}$ (The Curl)

۴- لاپلاس ∇^2 (The Laplacian)

در مختصات کارتزین :

$$\vec{\nabla} \phi = \text{grad} \phi = \vec{i} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial \phi}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \left(\vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix}$$

$$\nabla^2 = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

در مختصات استوانه ای :

$$\nabla F = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{i}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{i}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \left(\vec{i}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{i}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (v_r \vec{i}_r + v_\theta \vec{i}_\theta + v_z \vec{k}) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{V} = \left(\vec{i}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{i}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (v_r \vec{i}_r + v_\theta \vec{i}_\theta + v_z \vec{k})$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{V} = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \vec{i}_r & \vec{i}_\theta & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_r & v_\theta & v_z \end{vmatrix}$$

↓

$$\vec{\nabla} \times \vec{V} = \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{v_\theta}{r} \right) \vec{k} + \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \vec{i}_\theta + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) \vec{i}_r$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

دیورجانس **A** می شود

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{A} &= A'_{,r} = A'_{,r} + (\Gamma'_{rr} A^r + \Gamma'_{\theta r} A^\theta + \Gamma'_{zr} A^z) + A^\theta_{,\theta} + \\ &\quad (\Gamma^\theta_{r\theta} A^r + \Gamma^\theta_{\theta\theta} A^\theta + \Gamma^\theta_{z\theta} A^z) + A^z_{,z} + (\Gamma^z_{rz} A^r + \Gamma^z_{\theta z} A^\theta + \Gamma^z_{zz} A^z) \\ &= A'_{,r} + A^\theta_{,\theta} + A^z_{,z} + (0+0+0) + \left(\frac{1}{r} + 0+0 \right) + (0+0+0) \\ &= \frac{1}{g_r} \frac{\partial}{\partial r} A^r + \frac{1}{g_\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} A^\theta + \frac{1}{g_z} \frac{\partial}{\partial z} A^z + \frac{1}{r} A^r \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) A^r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} A^\theta + \frac{\partial}{\partial z} A^z, \end{aligned}$$

دیورجانس برداری **F** می شود

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r F_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial F_z}{\partial z}.$$

و کرل **F** می شود

$$\nabla \times \mathbf{F} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F_z}{\partial \theta} - \frac{\partial F_\theta}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{r}} + \left(\frac{\partial F_r}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial r} \right) \hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r F_\theta) - \frac{\partial F_r}{\partial \theta} \right] \hat{\mathbf{z}}.$$

لاپلاس اسکالر می شود

$$\begin{aligned}\nabla^2 f &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.\end{aligned}$$

و لاپلاس برداری می شود

$$\nabla^2 \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{v_r}{r^2} \\ \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2} \\ \frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} \end{bmatrix}.$$

سری تیلر:

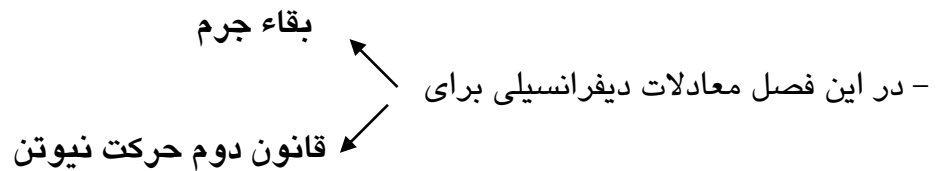
$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$$

فصل دوم

مقدمه ای بر تحلیل دیفرانسیلی حرکت سیالات

شکل انتگرالی معادلات اساسی برای یک حجم کنترل = شناخت رفتارهای عمده میدان جریان

معادلات حرکت سیالات در شکل دیفرانسیلی = شناخت جزء به جزء میدان جریان



- تحلیل بر مبنای ترمهای بینهایت کوچک و حجمهای کنترل

Conservation of Mass بقاء جرم

قبلاً بقاء جرم ما را به معادله پیوستگی هدایت نموده بود. در این قسمت، معادله دیفرانسیل برای بقاء جرم را در مختصات مستطیلی Rectangular Coordinate system و مختصات استوانه ای Cylindrical Coordinate system مورد بحث قرار می دهیم.

سیستم مختصات مستطیلی

مطابق شکل، در این مختصات حجم کنترل انتخابی یک مکعب بینهایت کوچک infinitesimal با اضلاعی به اندازه های dx , dy , dz می باشد. جرم مخصوص در مرکز، ρ ، حجم کنترل ρ ، و سرعت برابر $\vec{V} = \hat{i}u + \hat{j}v + \hat{k}w$ می باشد. جهت بدست آوردن خواص سیال در هر شش وجه حجم کنترل از بسط سرهای تیلر Taylor Series در اطراف نقطه 0 استفاده می کنیم.

برای مثال، در وجه سمت راست داریم :

$$\rho)_{x+\frac{dx}{2}} = \rho + \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{dx}{2} + \left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} \right) \frac{1}{2!} \left(\frac{dx}{2} \right)^2 + \dots$$

با صرفنظر از اجزاء درجه بالای این معادله

$$\rho)_{x+\frac{dx}{2}} = \rho + \left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right) \frac{dx}{2}$$

و

$$u)_{x+\frac{dx}{2}} = u + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) \frac{dx}{2}$$

همه در نقطه 0 تعریف شده اند. معادلات مشابه برای وجه سمت چپ:

$$\rho)_{x-\frac{dx}{2}} = \rho + \left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right) \left(-\frac{dx}{2}\right) = \rho - \left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right) \frac{dx}{2}$$

$$u)_{x-\frac{dx}{2}} = u + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) \left(-\frac{dx}{2}\right) = u - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) \frac{dx}{2}$$

بقا جرم بصورت یک جمله می شود:

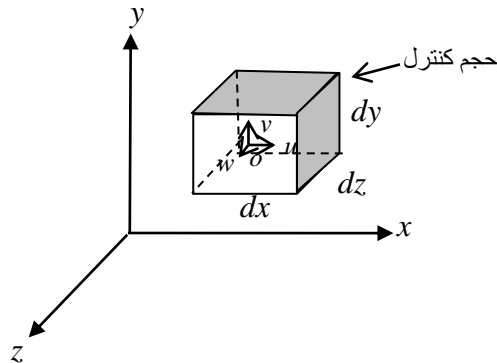
<p>جرم خالص جریان خروجی از سطح کنترل</p>	<p>مقدار تغییر در جرم درون حجم کنترل</p>	=0
--	--	----

برای ارزیابی جزء اول در این معادله باید $\int_{cs} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$ را مورد ارزیابی قرار دهیم. ما باید جرم جریان را در هر شش وجه سطح کنترل مورد رسیدگی قرار دهیم. جزئیات این محاسبات در جدول پیوست نشان داده شده است. مقدار مثبت بردار سرعت در هر شش وجه در جهت مثبت جهات مختصاتی فرض شده است. از اجزاء درجه بالا {مثل $(dx)^2$ } در بسط معادلات صرفنظر گردید. می بینیم که مقدار جریان خالص خروجی از سطح کنترل به شکل زیر بیان خواهد شد:

$$\left[\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} \right] dx dy dz$$

مقدار جرم درون حجم کنترل در هر لحظه برابر است با حاصلضرب جرم در واحد حجم، (ρ) و حجم $(dx dy dz)$ می باشد. پس مقدار تغییر جرم درون حجم کنترل خواهد شد:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz$$



حجم کنترل دیفرانسیلی در دستگاه مختصات مستطیلی

Table 5.1 Mass Flux through the Control Surface of a Rectangular Differential Control Volume

Surface	$\int \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$
<i>Left</i>	
(- x)	$= - \left[\rho - \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \right) \frac{dx}{2} \right] \left[u - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{dx}{2} \right] dy dz = - \rho u dy dz + \frac{1}{2} \left[u \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \right) + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \right] dx dy dz$
<i>Right</i>	
(+ x)	$= \left[\rho + \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \right) \frac{dx}{2} \right] \left[u + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{dx}{2} \right] dy dz = \rho u dy dz + \frac{1}{2} \left[u \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \right) + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \right] dx dy dz$
<i>Bottom</i>	
(- y)	$= - \left[\rho - \left(\frac{\partial \rho}{\partial y} \right) \frac{dy}{2} \right] \left[v - \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) \frac{dy}{2} \right] dx dz = - \rho v dx dz + \frac{1}{2} \left[v \left(\frac{\partial \rho}{\partial y} \right) + \rho \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] dx dy dz$
<i>Top</i>	
(+ y)	$= \left[\rho + \left(\frac{\partial \rho}{\partial y} \right) \frac{dy}{2} \right] \left[v + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) \frac{dy}{2} \right] dx dz = \rho v dx dz + \frac{1}{2} \left[v \left(\frac{\partial \rho}{\partial y} \right) + \rho \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] dx dy dz$
<i>Back</i>	
(- z)	$= - \left[\rho - \left(\frac{\partial \rho}{\partial z} \right) \frac{dz}{2} \right] \left[w - \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right) \frac{dz}{2} \right] dx dy = - \rho w dx dy + \frac{1}{2} \left[w \left(\frac{\partial \rho}{\partial z} \right) + \rho \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] dx dy dz$
<i>Front</i>	
(+ z)	$= \left[\rho + \left(\frac{\partial \rho}{\partial z} \right) \frac{dz}{2} \right] \left[w + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right) \frac{dz}{2} \right] dx dy = \rho w dx dy + \frac{1}{2} \left[w \left(\frac{\partial \rho}{\partial z} \right) + \rho \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] dx dy dz$

Then,

$$\int_{cs} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = \left\{ u \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \right) + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \right\} + \left\{ v \left(\frac{\partial \rho}{\partial y} \right) + \rho \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) \right\} + \left\{ w \left(\frac{\partial \rho}{\partial z} \right) + \rho \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right) \right\} dx dy dz$$

or

$$\int_{cs} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = \left[\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} \right] dx dy dz$$

بدین ترتیب در مختصات مستطیلی معادله دیفرانسیل برای بقاء جرم خواهد شد.

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

از آنجایی که بردار عملگر ∇ در مختصات مستطیلی بصورت

$$\nabla = \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

می باشد پس :

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = \nabla \cdot \rho \vec{V}$$

و بقاء جرم ممکن است بصورت زیر نوشته شود

$$\nabla \cdot \rho \vec{V} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

در دو حالت از نوع جریان، این معادله دیفرانسیلی پیوستگی ممکن است بصورت ساده تری نوشته شود.

حالت اول: برای جریان غیر قابل تراکم

ثابت $\rho = \rho(x, y, z, t)$ (جرم مخصوص تابع زمان و مکان نیست)، در نتیجه معادله پیوستگی بدین صورت خواهد شد.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

بنابراین بردار سرعت $\vec{V}(x, y, z, t)$ ، برای جریان غیر قابل تراکم باید معادله $\nabla \cdot \vec{V} = 0$ را ارضاء نماید. برای جریان ماندگار طبق تعریف همه خواص سیال مستقل از زمان هستند؛ در نتیجه برای جریان ماندگار که $\rho = \rho(x, y, z)$ است معادله پیوستگی بصورت زیر نوشته می شود

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0$$

یا

$$\nabla \cdot \rho \vec{V} = 0$$

مثال: انتگرال گیری از معادله پیوستگی دیفرانسیلی دو بعدی

برای یک جریان دو بعدی در صفحه xy ، بردار سرعت در جهت x با معادله $u = Ax$ داده شده است. معادله ممکن بردار سرعت در جهت y را برای جریان ماندگار، غیر قابل تراکم تعیین نماید. چند احتمال برای بردار y وجود دارد.

مثال ۵/۱

داده ها: جریان دو بعدی در صفحه xy که $u = Ax$ است.

پیدا کنید:

الف: بردار y ممکن برای جریان ماندگار غیر قابل تراکم.

ب: چند احتمال برای بردار y وجود دارد.

راه حل:

$$\nabla \cdot \rho \vec{V} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \text{معادله اساسی:}$$

$$\rho = \text{ثابت} \quad \text{و} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \text{برای جریان ماندگار غیرقابل تراکم}$$

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0 \quad \text{در نتیجه}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad \text{در مختصات مستطیلی}$$

برای جریان دو بعدی در صفحه xy , $\vec{V} = \vec{V}(x \text{ و } y)$. پس مقدار مشتق جزئی در جهت z برابر صفر

خواهد بود و

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

پس

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x} = -A$$

که نشان دهنده یک معادله برای مقدار تغییرات v با x ثابت می باشد. برای بدست آوردن معادله ای

برای v ، می توان از این معادله انتگرال گیری نمود.

نتیجه خواهد شد

$$v = \int \frac{\partial v}{\partial y} dy + f(x) = -Ay + f(x) \quad \leftarrow v$$

علت ظاهر شدن تابع x در معادله بدلیل اینست که ما مشتق جزئی v را نسبت به y داشته ایم. هر تابعی برای $f(x)$ مجاز می باشد زیرا به هر حال $\frac{\partial}{\partial y} f(x) = 0$ است. بنابراین هر تعداد معادله برای

v می تواند معادله پیوستگی دیفرانسیلی را تحت مختصات داده شده ارضاء نمایند. ساده ترین شکل

معادله برای v ، می تواند در حالتی بدست آید که $f(x) = 0$ در نظر گرفته شود. در نتیجه $v = -Ay$ و

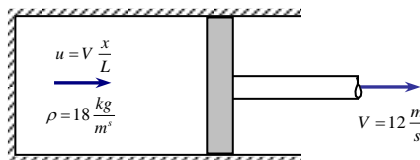
$$\vec{V} = Ax \hat{i} - Ay \hat{j} \quad \leftarrow \vec{V}$$

این مسئله چگونگی استفاده از معادله دیفرانسیلی پیوستگی را در جریان ماندگار، غیرقابل تراکم برای ارزیابی یک بردار سرعت متحمل و همچنین انتگرال گیری از یک دیفرانسیل جزئی را توضیح داده است.

مثالی دیگر - معادله پیوستگی دیفرانسیلی غیر ماندگار

یک گاز که درون ترکیب هوا می باشد و در یک محفظه فشاری قرار دارد که مانند سیستم سیلندر و پیستون عمل می کند، در یک لحظه در حالتی که پیستون در $L = 0.15 \text{ m}$ فاصله از انتهای بسته سیلندر می باشد، جرم مخصوص گاز بصورت یکنواخت برابر $\rho = 18 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ می باشد در این حالت پیستون شروع به حرکت بطرف بیرون با $V = 12 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ می نماید. حرکت گاز بصورت یک بعدی و بصورت نسبی از فاصله تا انتهای بسته سیلندر می باشد، و بصورت خطی از صفر در قسمت چسبیده به قسمت بسته سیلندر تا $u = V$ در قسمت چسبیده به پیستون تغییر می کند. مقدار تغییر جرم مخصوص گاز را در این حالت مورد ارزیابی قرار دهید. یک معادله برای بیان جرم مخصوص متوسط بصورت تابعی از زمان بدست آورید.

داده ها: پیستون و سیلندر بصورتی که نشان داده شده است



خواسته ها:

الف: مقدار تغییر در جرم مخصوص

ب: $\rho(t)$

راه حل: معادله اساسی

$$\nabla \cdot \rho \vec{V} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

در مختصات مستطیلی

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

از آنجایی که $u = u(x)$ است، پس مشتق جزئی در جهت های z, y برابر صفر است و

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

پس :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial \rho u}{\partial x} = -\rho \frac{\partial u}{\partial x} - u \frac{\partial \rho}{\partial x}$$

از آنجایی که ρ در حجم گاز یکنواخت فرض شده در نتیجه:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\rho \frac{\partial u}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0$$

از آنجایی که $u = V \frac{x}{L}$ ، $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{V}{L}$ و $\frac{d\rho}{dt} = -\rho \frac{V}{L}$

هر چند قابل ذکر است که $L = L_0 + Vt$

با جدا کردن متغیر ها و انتگرال گیری،

$$\int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\rho} = -\int_0^t \frac{V}{L} dt = -\int_0^t \frac{V dt}{L_0 + Vt}$$

$$\ln \frac{\rho}{\rho_0} = \ln \frac{L_0}{L_0 + Vt}$$

$$\rho(t) = \rho_0 \left[\frac{1}{1 + Vt / L_0} \right]$$

و

$$\leftarrow \rho(t)$$

در $t = 0$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\rho_0 \frac{V}{L} = -18 \frac{kg}{m^3} \times 12 \frac{m}{s} \times \frac{1}{0.15} = -1440 \frac{kg}{m^3 \cdot s} \quad \leftarrow \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

معادلات در سیستم مختصات استوانه ای

در مختصات استوانه ای، حجم کنترل دیفرانسیلی مناسب در شکل نشان داده شده است.

جرم مخصوص در مرکز (O) حجم کنترل برابر ρ است و سرعت در آنجا برابر :

$$\vec{V} = \hat{e}_r V_r + \hat{e}_\theta V_\theta + \hat{k} V_z$$

که در آن $\hat{e}_r, \hat{e}_\theta$ و \hat{k} بترتیب بردار واحد در جهات r, θ, z می باشند.

برای ارزیابی $\int_{CS} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$ ، باید جرم جریان عبوری از هر شش وجه سطح کنترل مورد بررسی قرار گیرد. خواص سیال در شش وجه سطح کنترل با استفاده از بسط سری های تیلور در اطراف نقطه O بدست می آیند. جزئیات جرم جریان در وجه های سطح کنترل در جدول زیر نشان داده شده اند. اجزاء سرعت V_z, V_θ, V_r هم به سمت مثبت هر جهت فرض شده اند. و اجزاء درجه بالا در سری های تیلور صرف نظر گردیده اند.

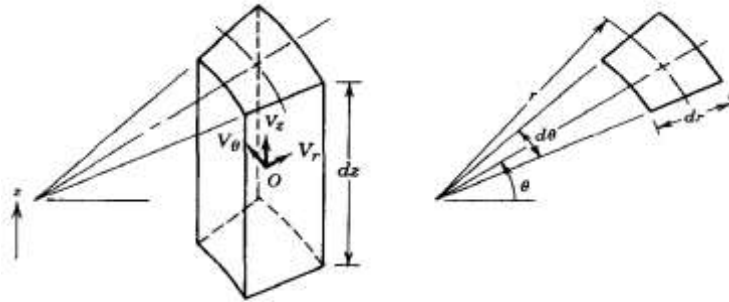


Fig. 5.2 Differential control volume in cylindrical coordinates.

حجم کنترل دیفرانسیلی در دستگاه مختصات استوانه ای

Surface	$\int \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$
Inside (-r)	$-\left[\rho - \left(\frac{\partial \rho}{\partial r}\right) \frac{dr}{2}\right] \left[V_r - \left(\frac{\partial V_r}{\partial r}\right) \frac{dr}{2}\right] (r - \frac{dr}{2}) d\theta dz = -\rho V_r r d\theta dz + \rho V_r \frac{dr}{2} d\theta dz + \rho \left(\frac{\partial V_r}{\partial r}\right) r \frac{dr}{2} d\theta dz + V_r \left(\frac{\partial \rho}{\partial r}\right) r \frac{dr}{2} d\theta dz$
Outside (+r)	$\left[\rho + \left(\frac{\partial \rho}{\partial r}\right) \frac{dr}{2}\right] \left[V_r + \left(\frac{\partial V_r}{\partial r}\right) \frac{dr}{2}\right] (r + \frac{dr}{2}) d\theta dz = \rho V_r r d\theta dz + \rho V_r \frac{dr}{2} d\theta dz + \rho \left(\frac{\partial V_r}{\partial r}\right) r \frac{dr}{2} d\theta dz + V_r \left(\frac{\partial \rho}{\partial r}\right) r \frac{dr}{2} d\theta dz$
Front (-θ)	$-\left[\rho - \left(\frac{\partial \rho}{\partial \theta}\right) \frac{d\theta}{2}\right] \left[V_\theta - \left(\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta}\right) \frac{d\theta}{2}\right] dr dz = -\rho V_\theta dr dz + \rho \left(\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta}\right) \frac{d\theta}{2} dr dz + V_\theta \left(\frac{\partial \rho}{\partial \theta}\right) \frac{d\theta}{2} dr dz$
Back (+θ)	$\left[\rho + \left(\frac{\partial \rho}{\partial \theta}\right) \frac{d\theta}{2}\right] \left[V_\theta + \left(\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta}\right) \frac{d\theta}{2}\right] dr dz = \rho V_\theta dr dz + \rho \left(\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta}\right) \frac{d\theta}{2} dr dz + V_\theta \left(\frac{\partial \rho}{\partial \theta}\right) \frac{d\theta}{2} dr dz$
Bottom (-z)	$-\left[\rho - \left(\frac{\partial \rho}{\partial z}\right) \frac{dz}{2}\right] \left[V_z - \left(\frac{\partial V_z}{\partial z}\right) \frac{dz}{2}\right] r d\theta dr = -\rho V_z r d\theta dr + \rho \left(\frac{\partial V_z}{\partial z}\right) \frac{dz}{2} r d\theta dr + V_z \left(\frac{\partial \rho}{\partial z}\right) \frac{dz}{2} r d\theta dr$
Top (+z)	$\left[\rho + \left(\frac{\partial \rho}{\partial z}\right) \frac{dz}{2}\right] \left[V_z + \left(\frac{\partial V_z}{\partial z}\right) \frac{dz}{2}\right] r d\theta dr = \rho V_z r d\theta dr + \rho \left(\frac{\partial V_z}{\partial z}\right) \frac{dz}{2} r d\theta dr + V_z \left(\frac{\partial \rho}{\partial z}\right) \frac{dz}{2} r d\theta dr$
Then,	
	$\int_{CS} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = \left[\rho V_r + r \left(\rho \left(\frac{\partial V_r}{\partial r}\right) + V_r \left(\frac{\partial \rho}{\partial r}\right)\right) + \left(\rho \left(\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta}\right) + V_\theta \left(\frac{\partial \rho}{\partial \theta}\right)\right) + r \left(\rho \left(\frac{\partial V_z}{\partial z}\right) + V_z \left(\frac{\partial \rho}{\partial z}\right)\right)\right] dr d\theta dz$
or	
	$\int_{CS} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = \left[\rho V_r + r \frac{\partial \rho V_r}{\partial r} + \frac{\partial \rho V_\theta}{\partial \theta} + r \frac{\partial \rho V_z}{\partial z}\right] dr d\theta dz$

Table 5.2 Mass Flux through the Control Surface of a Cylindrical Differential Control Volume

Surface $\int \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$

Inside

$$(-r) = -\left[\rho - \left(\frac{\partial \rho}{\partial r}\right) \frac{dr}{2}\right] \left[V_r - \left(\frac{\partial V_r}{\partial r}\right) \frac{dr}{2}\right] \left(r - \frac{dr}{2}\right) d\theta dz =$$

$$-\rho V_r r d\theta dz + \rho V_r \frac{dr}{2} d\theta dz + \rho \left(\frac{\partial V_r}{\partial r}\right) r \frac{dr}{2} d\theta dz + V_r \left(\frac{\partial \rho}{\partial r}\right) r \frac{dr}{2} d\theta dz$$

Outside

$$(+r) = \left[\rho + \left(\frac{\partial \rho}{\partial r}\right) \frac{dr}{2}\right] \left[V_r - \left(\frac{\partial V_r}{\partial r}\right) \frac{dr}{2}\right] \left(r + \frac{dr}{2}\right) d\theta dz =$$

$$\rho V_r r d\theta dz + \rho V_r \frac{dr}{2} d\theta dz + \rho \left(\frac{\partial V_r}{\partial r}\right) r \frac{dr}{2} d\theta dz + V_r \left(\frac{\partial \rho}{\partial r}\right) r \frac{dr}{2} d\theta dz$$

Front

$$(-\theta) = -\left[\rho - \left(\frac{\partial \rho}{\partial \theta}\right) \frac{d\theta}{2}\right] \left[V_\theta - \left(\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta}\right) \frac{d\theta}{2}\right] dr dz = -\rho V_\theta dr dz + \rho \left(\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta}\right) \frac{d\theta}{2} dr dz + V_\theta \left(\frac{\partial \rho}{\partial \theta}\right) \frac{d\theta}{2} dr dz$$

Back

$$(+\theta) = \left[\rho + \left(\frac{\partial \rho}{\partial \theta}\right) \frac{d\theta}{2}\right] \left[V_\theta - \left(\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta}\right) \frac{d\theta}{2}\right] dr dz = \rho V_\theta dr dz + \rho \left(\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta}\right) \frac{d\theta}{2} dr dz + V_\theta \left(\frac{\partial \rho}{\partial \theta}\right) \frac{d\theta}{2} dr dz$$

Bottom

$$(-z) = -\left[\rho - \left(\frac{\partial \rho}{\partial z}\right) \frac{dz}{2}\right] \left[V_z - \left(\frac{\partial V_z}{\partial z}\right) \frac{dz}{2}\right] r d\theta dr = -\rho V_z r d\theta dr + \rho \left(\frac{\partial V_z}{\partial z}\right) \frac{dz}{2} r d\theta dr + V_z \left(\frac{\partial \rho}{\partial z}\right) \frac{dz}{2} r d\theta dr$$

Top

$$(+z) = \left[\rho + \left(\frac{\partial \rho}{\partial z}\right) \frac{dz}{2}\right] \left[V_z + \left(\frac{\partial V_z}{\partial z}\right) \frac{dz}{2}\right] r d\theta dr = \rho V_z r d\theta dr + \rho \left(\frac{\partial V_z}{\partial z}\right) \frac{dz}{2} r d\theta dr + V_z \left(\frac{\partial \rho}{\partial z}\right) \frac{dz}{2} r d\theta dr$$

Then

$$\int_{cs} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = \left[\rho V_r + r \left\{ \rho \left(\frac{\partial V_r}{\partial r}\right) + V_r \left(\frac{\partial \rho}{\partial r}\right) \right\} + \left\{ \rho \left(\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta}\right) + V_\theta \left(\frac{\partial \rho}{\partial \theta}\right) \right\} + r \left\{ \rho \left(\frac{\partial V_z}{\partial z}\right) + V_z \left(\frac{\partial \rho}{\partial z}\right) \right\} \right] dr d\theta dz$$

Or

$$\int_{cs} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = \left[\rho V_r + r \frac{\partial \rho V_r}{\partial r} + \frac{\partial \rho V_\theta}{\partial \theta} + r \frac{\partial \rho V_z}{\partial z} \right] dr d\theta dz$$

مشاهده می کنیم که مقدار خالص جرم جریان خروجی از سطح کنترل بوسیله رابطه زیر بیان می گردد.

$$\left[\rho V_r + r \frac{\partial \rho V_r}{\partial r} + \frac{\partial \rho V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \rho V_z}{\partial z} \right] dr d\theta dz$$

جرم درون حجم کنترل در هر لحظه برابر حاصلضرب جرم در واحد حجم (ρ) و حجم ($rd\theta dr dz$) می باشد. در نتیجه مقدار تغییر در جرم درون حجم کنترل بوسیله رابطه زیر بیان خواهد شد.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} r d\theta dr dz$$

در نتیجه، در مختصات استوانه ای معادله دیفرانسیلی برای بقاء جرم خواهد شد :

$$\rho V_r + r \frac{\partial \rho V_r}{\partial r} + \frac{\partial \rho V_\theta}{\partial \theta} + r \frac{\partial \rho V_z}{\partial z} + r \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

با تقسیم رابطه بر r داریم :

$$\frac{\rho V_r}{r} + \frac{\partial \rho V_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \rho V_z}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

یا

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (r \rho V_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (\rho V_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial (\rho V_z)}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

در مختصات استوانه ای عامل برداری ∇ بشکل زیر تعریف می شود.

$$\nabla = \hat{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \hat{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

در نتیجه معادله قبل بصورت بردار زیر نوشته می شود

$$\nabla \cdot \rho \vec{V} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

برای جریان غیر قابل تراکم ($\rho = \text{ثابت}$)، معادله بقاء جرم در مختصات استوانه ای به شکل زیر کاهش می یابد

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (r V_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0$$

بنابراین بردار سرعت $\vec{V}(x, y, z, t)$ برای جریان غیر قابل تراکم باید معادله $\nabla \cdot \vec{V} = 0$ را برآورده نماید.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{برای محاسبه } \nabla \cdot \rho \vec{V} \text{ در مختصات استوانه ای باید به خاطر داشت که } \frac{\partial \hat{e}_r}{\partial \theta} = \hat{e}_\theta, \frac{\partial \hat{e}_\theta}{\partial \theta} = -\hat{e}_r \text{ می باشد.} \end{array} \right.$$

برای جریان ماندگار، معادله بقاء جرم به شکل زیر کاهش می یابد:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (r \rho V_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (\rho V_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial (\rho V_z)}{\partial z} = 0$$

یا

$$\nabla \cdot \rho \vec{V} = 0$$

مثال از معادله دیفرانسیلی پیوستگی در مختصات استوانه ای

یک جریان شعاعی یک بعدی در صفحه $r\theta$ با مشخصات $V_r = F(r)$ و $V_\theta = 0$ در نظر بگیرید. تعیین کنید حالت‌های $F(r)$ مورد نیاز برای یک جریان غیر قابل تراکم.

داده ها: یک جریان شعاعی یک بعدی در صفحه $r\theta$:

$$V_\theta = 0 \text{ و } V_r = f(r)$$

خواسته ها: $f(r)$ مورد نیاز برای جریان غیر قابل تراکم

راه حل

$$\nabla \cdot \rho \vec{V} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

معادله اساسی

برای جریان غیر قابل تراکم ($\rho = \text{ثابت}$) پس $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

در مختصات استوانه ای

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rV_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} V_\theta + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0$$

با توجه به بردار سرعت داده شده $\vec{V} = \vec{V}(r)$ ، $V_\theta = 0$ و مشتق جزئی با توجه به z خواهیم داشت

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rV_r) = 0$$

با انتگرال گیری نسبت به r نتیجه خواهد داد

$$rV_r = \text{ثابت}$$

بنابراین، معادله پیوستگی نشان می دهد که برای جریان شعاعی یک بعدی یک سیال غیرقابل تراکم،

سرعت شعاعی باید $V_r = F(r) = \frac{C}{r}$ باشد.

تابع جریان برای جریان دو بعدی غیر قابل تراکم

توضیح ریاضی الگوهای جریان در حرکت سیالات از اهمیت خاصی برخوردار است. یک روش بیان مناسب باید بتواند تصویری از شکل خطوط جریان (شامل نواحی مرزی) و همچنین مقیاس سرعت در نقاط مورد نظر در جریان را توصیف نماید. روش ریاضی که می تواند این منظور را برآورده نماید، تابع جریان (ψ psi) می باشد.

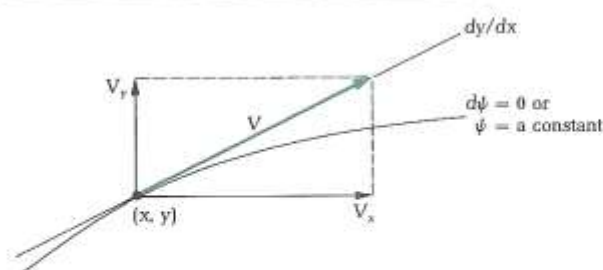
تابع جریان، رابطه ای است که ارتباط بین خطوط جریان و عبارت بقاء ماده را فرموله می کند. تابع جریان، یک تابع ریاضی مجرد $(\psi(x, y, t))$ می باشد که با دو جزء سرعت $u(x, y, t)$ و $v(x, y, t)$ جایگزین شده است.

برای یک جریان دو بعدی غیر قابل تراکم در یک صفحه xy بقاء جرم می تواند بصورت زیر نوشته شود.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

FIGURE 12.2

Streamline and velocity through a point.



اگر یک تابع، $\psi(x, y, t)$ ، بنام تابع جریان بصورت زیر تعریف شود.

$$u \equiv \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v \equiv -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

پس معادله پیوستگی بصورت زیر نوشته خواهد شد.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} = 0$$

خطوط جریان، خطهایی هستند که در میدان جریان رسم می شوند. می توان گفت در هر لحظه خطوط جریان مماس بر جهت جریان در هر نقطه از میدان جریان می باشند. بنابراین، اگر $d\vec{r}$ واحد طول در مسیر یک خط جریان باشد، معادله خط جریان خواهد شد:

$$\vec{V} \times d\vec{r} = 0 = (\hat{i}u + \hat{j}v) \times (\hat{i} dx + \hat{j} dy) = \hat{k}(u dy - v dx)$$

معادله یک خط جریان در یک جریان دو بعدی بصورت زیر می باشد.

$$u dy - v dx = 0$$

با جایگزینی اجزاء سرعت، (v, u) بر حسب تابع جریان (ψ) خواهیم یافت که در طول یک خط جریان :

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = 0$$

از آنجایی که $\psi = \psi(x, y, t)$ ، در نتیجه در یک لحظه $\psi = \psi(x, y, t)$ ، در این لحظه تغییر در ψ ممکن است با توجه به $\psi = \psi(x, y)$ بیان شود. پس در هر لحظه می توان نوشت:

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy$$

از مقایسه دو معادله فوق ملاحظه خواهیم کرد که در طول یک خط جریان لحظه ای،

$$d\psi = 0$$

در طول یک خط جریان برابر یک عدد ثابت می باشد. از آنجایی که دیفرانسیل ψ عدد صحیح می باشد، انتگرال $d\psi$ بین دو نقطه از میدان جریان، $\psi_2 - \psi_1$ ، تنها بستگی به نقطه انتهایی انتگرال دارد. از تعریف خط جریان در می یابیم که هیچ جریانی از روی خط جریان عبور نمی کند. بنابراین اگر خطوط جریان در یک میدان جریان دو بعدی، غیر قابل تراکم در یک لحظه مشخص، مانند وضعیت نشان داده شده در شکل باشند، مقدار جریان بین خطوط جریان ψ_2, ψ_1 در طول خطوط DF, DE, BC, AB باید برابر باشند.

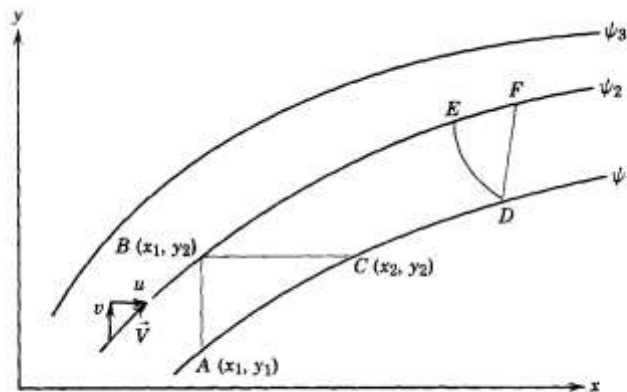


Fig. 5.3 Instantaneous streamlines in a two-dimensional flow.

حجم جریان (Q) بین خطوط جریان ψ_2, ψ_1 بوسیله بدست آوردن جریان عبوری از خط AB و BC می تواند برآورده شود. برای عمق واحد، مقدار جریان عبوری از AB برابر است با:

$$Q = \int_{y_1}^{y_2} u dy = \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial \psi}{\partial y} dy$$

در طول خط AB ، ثابت x ، بنابراین $d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial y} dy$:

$$Q = \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = \int_{\psi_1}^{\psi_2} d\psi = \psi_2 - \psi_1$$

برای عمق واحد، مقدار جریان عبوری از خط BC برابر است با:

$$Q = \int_{x_1}^{x_2} v dx = - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial \psi}{\partial x} dx$$

در طول خط BC، ثابت y ، بنابراین $d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx$

$$Q = - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial \psi}{\partial x} dx = - \int_{\psi_2}^{\psi_1} d\psi = \psi_2 - \psi_1$$

بنابراین حجم جریان عبوری (در عمق واحد) بین هر دو خط جریان، می تواند بصورت تفاوت بین دو مقدار ثابت ψ معرف دو خط جریان نوشته شود.

برای جریان ماندگار، قابل تراکم دو بعدی در صفحه xy ، تابع جریان ψ بصورت زیر تعریف می شود:

$$\rho u \equiv \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \rho v \equiv - \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

اختلاف بین دو مقدار ثابت ψ معرف دو خط جریان، برابر است با مقدار جرم جریان عبوری (در عمق واحد) بین دو خط جریان.

علامتی که معمولاً برای مشخص کردن تابع جریان، ψ بکار برده می شود، نشان دهنده جهت جریان است که مقدار مثبت آن نشان دهنده جریان از چپ به راست می باشد. اگر خط جریان عبوری از مبدأ و $\psi = 0$ بیان شده باشد، مقدار ψ برای سایر خطوط جریان، بیانگر جریان عبوری از چپ به راست بین خط مبدأ و آن خط جریان می باشد. این موضوع در مثال توضیح داده شده است.

برای یک جریان غیر قابل تراکم دو بعدی در صفحه $r\theta$ ، معادله بقاء جرم می تواند بشکل زیر نوشته شود.

$$\frac{\partial(rV_r)}{\partial r} + \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} = 0$$

بدین ترتیب، تابع جریان می تواند بشکل زیر نوشته شود.

$$V_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad V_\theta = - \frac{\partial \psi}{\partial r}$$

با ψ تعریف شده در معادله فوق، معادله پیوستگی کاملاً ارضاء می شود.

مثال: تابع جریان برای جریان در یک خم (راست گوشه) corner

برای یک جریان ماندگار، غیر قابل تراکم بردار سرعت $\vec{V} = Ax\hat{i} - Ay\hat{j}$ با $A = 2 \text{ s}^{-1}$ ، تابع جریان مورد نظر این میدان سرعت را تعیین می کند. الگوی خطوط جریان را برای ربع اول و دوم صفحه xy رسم و تفسیر نمائید.

مثال :

داده ها: میدان سرعت $\vec{V} = Ax\hat{i} - Ay\hat{j}$ با $A = 2 s^{-1}$.

خواسته ها:

الف: تابع جریان ψ ،

ب: رسم تابع جریان در ربع اول و دوم و تفسیر آن.

راه حل:

جریان غیر قابل تراکم است، بنابراین تابع جریان در معادله $v \equiv -\frac{\partial\psi}{\partial x}$ ، $u \equiv \frac{\partial\psi}{\partial y}$ صادق می باشد. از

این معادله داریم $u = \frac{\partial\psi}{\partial y} = Ax$ ، $v = -\frac{\partial\psi}{\partial x}$ با توجه به میدان سرعت داده شده داریم

انتگرال گیری نسبت به y نتیجه می دهد:

$$\psi = \int \frac{\partial\psi}{\partial y} dy + f(x) = Axy + f(x)$$

$f(x)$ اختیاری است. تابع $f(x)$ ممکن است با بکارگیری این معادله برای v بدست آید. بنابراین از

معادله فوق داریم :

$$v = -\frac{\partial\psi}{\partial x} = -Ay - \frac{df}{dx}$$

با توجه به میدان سرعتی داده شده داریم $v = -Ay$. مقایسه این معادله با معادله فوق نشان می دهد که

$$\frac{df}{dx} = 0 \quad \text{یا} \quad \text{ثابت} = f(x)$$

بنابراین، معادله $\psi = Axy + f(x)$ می شود .

$$\psi = Axy + c$$

← ψ

خطهای با ψ ثابت، نشان دهنده خطوط جریان در میدان جریان می باشند. به منظور رسم خطوط، ثابت

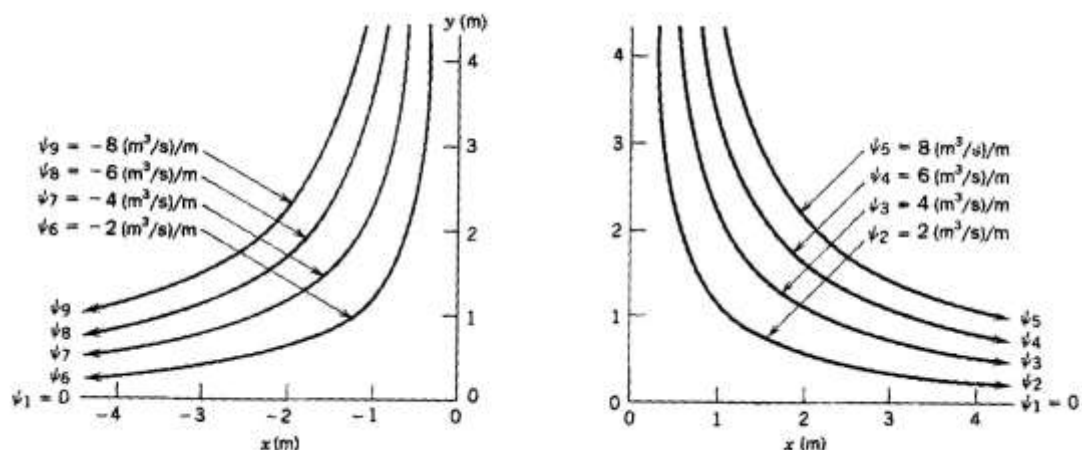
C ممکن است هر مقدار مناسب دلخواه در نظر گرفته شود. به منظور رسم خط جریان مبدأً $(\psi = \psi_1 = 0)$ ،

ثابت (c) صفر در نظر گرفته می شود. سپس مقدار C برای هر خط جریان دیگر، مقدار جریان از چپ به

راست بین خط مبدأً و آن خط جریان را بیان خواهد کرد. با $c = 0$ و $A = 2 s^{-1}$

$$\psi = 2xy \quad \left(\frac{m^3/s}{m} \right)$$

در شکل زیر خطوط جریان برای ربع اول و ربع دوم صفحه مختصات بصورت مجزا نشان داده شده اند.



در ربع اول، از آنجایی که $u > 0$ ، $v < 0$ است، جهت جریان از چپ به راست و بطرف پائین است. حجم جریان بین دو خط جریان، $\psi = \psi_1$ ، و خط جریان $\psi = \psi_2$ ، برابر است با:

$$Q_{12} = \psi_2 - \psi_1 = 2 \quad \left(\frac{m^3}{s} \right) / m$$

در ربع دوم، از آنجایی که $u < 0$ ، $v < 0$ است، جهت جریان از راست به چپ و بطرف پائین است. حجم جریان بین خطوط جریان ψ_7 ، ψ_9 برابر است با:

$$Q_{79} = \psi_9 - \psi_7 = [-8 - (-4)] \left(\frac{m^3}{s} \right) / m = -4 \left(\frac{m^3}{s} \right) / m$$

علامت منفی نشان دهنده این است که جریان از راست به چپ می باشد.

در مناطقی: جریان با سرعت زیاد اتفاق می افتد که خطوط جریان به هم نزدیک می شوند. جریانهای با سرعت کم، نزدیک به خط مبدأ، جایی که فاصله خطوط جریان زیاد است، اتفاق می افتد. در هر چهارگوشه، کیفیت جریان مانند جریان در راست گوشه که از دو دیواره ایجاد شده است، می باشد.

تعاریف خط جریان - خط رگه - خط مسیر و خط زمان

خط جریان (Streamlines): خطی است که در هر مکان و در زمان داده شده مماس بر بردار سرعت است.

خط رگه (Streaklines): مکان هندسی ذراتی است که قبلاً از یک نقطه مشخص عبور نموده اند. در یک میدان جریان با تزریق ماده رنگی مسیر یاب در یک نقطه ترسیم می شود.

خط مسیر (Pathlines): مسیری است که یک ذره سیال در میدان جریان طی می کند یا توسط یک ذره در یک مدت زمان خاص طی می شود.

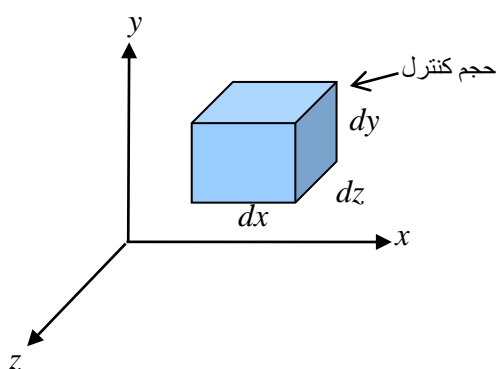
خط زمان (Timelines): خطی است که توسط مجموعه ای از ذرات سیال شکل می گیرد که در مدت زمان کوتاهی قبل این ذرات در یک راستای مستقیم و یا راستای منحنی شکل قرار داشتند و با گذشت زمان تغییر نموده اند.

حرکت یک ذره سیال

قبل از اینکه اثرات نیروها بر حرکت سیال (دینامیک) فرموله شود، لازم است ابتدا علم حرکت (سینماتیک) یک ذره سیال در یک میدان سیال، مورد بررسی قرار گیرد.

برای سهولت، یک ذره بینهایت کوچک و با جرم مخصوص مشخص (جرم) را دنبال می نمایم؛ همانطور که در شکل نشان داده شده است.

همانطور که ذره بینهایت کوچک به جرم (dm) ، درون جریان سیال حرکت می کند، چندین وضعیت ممکن است برای آن اتفاق بیافتد. واضح است که ذره انتقال می یابد؛ ذره دستخوش جابجایی خطی از یک مکان z_1, y_1, x_1 به مکان دیگر z_2, y_2, x_2 می شود. ذره همچنین ممکن است چرخش داشته باشد؛ نمایش ذره همانطور که در شکل نشان داده شده، وقتی وجوه ذره مورد نظر موازی محورهای مختصات Z, Y, X باشند، ممکن است بر اثر فقط چرخش حول هر محور مختصات (و یا همه محورهای مختصات) تغییر نماید. علاوه بر این، ذره ممکن است تغییر شکل دهد. تغییر شکل ممکن است به دو شکل صورت گیرد. تغییر شکل خطی و زاویه ای. تغییر شکل خطی، که در آن صفحات ذره که ابتدا بر هم عمود می باشند (بطور مثال صفحه بالا و وجه جانبی ذره) بصورت عمودی باقی بمانند، و تغییر در شکل بدون تغییر در زوایای ذره بوجود آید.



شکل: ذره بسیار کوچک از سیال

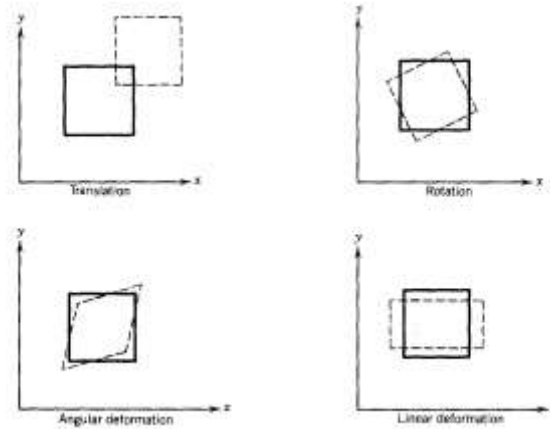


Fig. 5.5 Pictorial representation of the components of fluid motion.

تغییر شکل زاویه ای، سبب از بین رفتن ذره می شوند، بطوریکه صفحات که ابتدا عمود برهم بودند، دیگر عمود برهم نخواهند ماند. بطور کلی در طول حرکت سیال یک ذره سیال، ممکن است دستخوش ترکیبی از انتقال، چرخش، و تغییر شکل خطی یا زاویه ای را همراه داشته باشد.

این چهار شکل از حرکت سیال، برای حرکت در صفحه XY در شکل شرح داده شده اند. برای یک جریان سه بعدی، حرکات مشابه از ذره را می شود در صفحات XZ و YZ نمایش داد. برای حرکات فقط انتقالی و فقط چرخشی، ذره سیال شکلش را حفظ می نماید، و ذره تغییر شکل ندارد. بنابراین بر اثر انتقال و چرخش تنش برشی بوجود نمی آید. همانطور که از قبل می دانیم تنش برشی مستقیماً نسبتی از مقدار تغییر شکل زاویه ای است. در شکل زیر تفاوت چرخشی و غیر چرخشی گرفتن سیال نشان داده شده است.

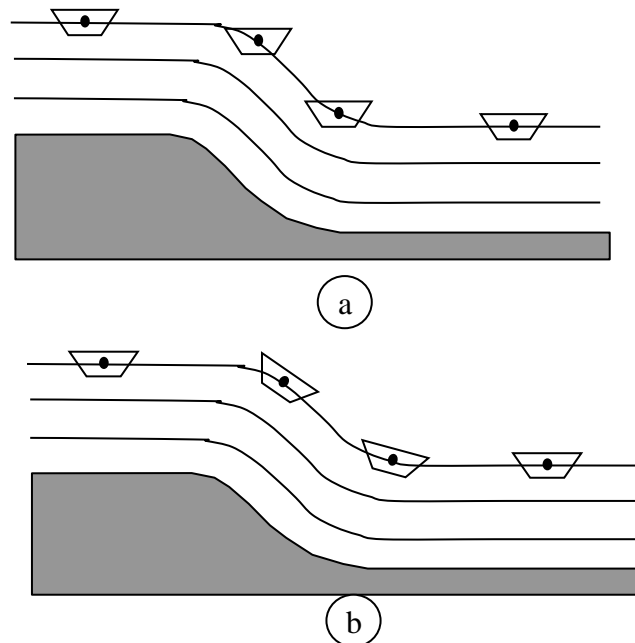


FIGURE 12.5

Rotational and irrotational flow in a duct.

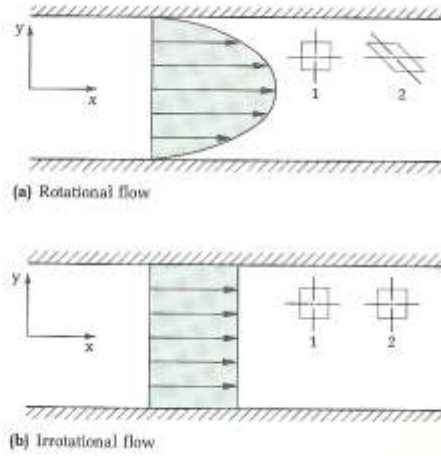


FIGURE 12.6

Rotational and irrotational flow.

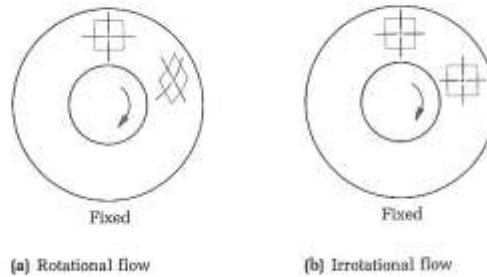
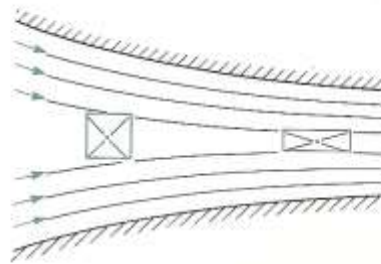


FIGURE 12.7

Irrotational flow through a converging duct.



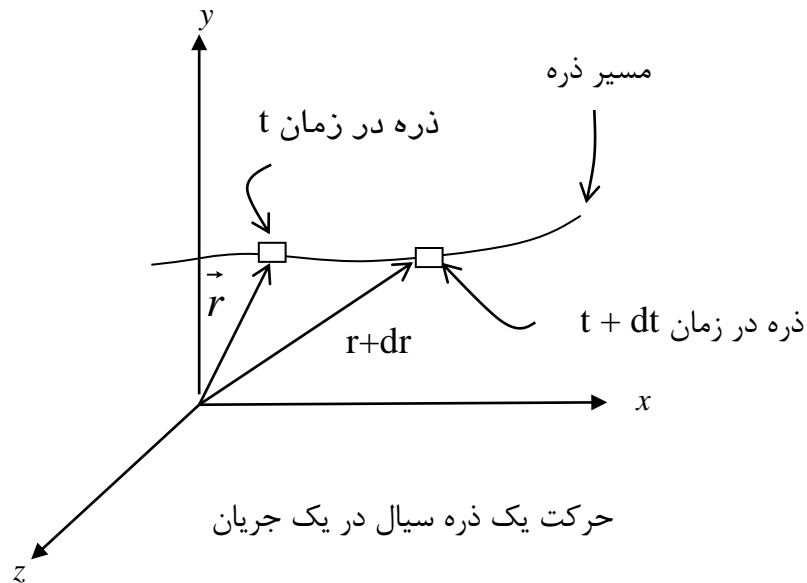
شتاب یک ذره سیال در یک میدان سرعتی (دارای سرعت)

صورت مسئله بشکل زیر می باشد:

میدان سرعتی بصورت $\vec{V} = \vec{V}(x, y, z, t)$ داده شده است، شتاب ذره سیال (\vec{a}_p) را پیدا کنید.

یک ذره در حال حرکت در میدان سرعتی را در نظر بگیرید. در زمان t ، ذره در موقعیت Z, y, X می باشد و دارای سرعتی مرتبط با مختصات آن نقطه در فضا و t می باشد.

$$\vec{V}_p \Big|_t = \vec{V}(x, y, z, t)$$



در زمان $t + dt$ ، به موقعیت جدید با مختصات $z + dz$ ، $y + dy$ ، $x + dx$ حرکت نموده است و دارای سرعتی بصورت زیر می باشد.

$$\vec{V}_P \Big|_{t+dt} = \vec{V}(x + dx, y + dy, z + dz, t + dt)$$

این وضعیت در شکل بصورت تصویری نشان داده شده است. سرعت ذره در زمان t (موقعیت \vec{r}) با $\vec{V}_p = \vec{V}(x, y, z, t)$ داده شده است. پس مقدار $d\vec{V}_p$ ، مقدار تغییر در سرعت ذره که از موقعیت \vec{r} به $\vec{r} + d\vec{r}$ جابجا شده با رابطه زیر بیان می شود:

$$d\vec{V}_p = \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} dx_p + \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} dy_p + \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} dz_p + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} dt$$

شتاب کلی ذره می شود:

$$\vec{a}_p = \frac{d\vec{V}_p}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} \frac{dx_p}{dt} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} \frac{dy_p}{dt} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} \frac{dz_p}{dt} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t}$$

از آنجایی که :

$$\frac{dz_p}{dt} = w, \quad \frac{dy_p}{dt} = v, \quad \frac{dx_p}{dt} = u$$

پس :

$$\vec{a}_p = \frac{d\vec{V}_p}{dt} = u \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t}$$

برای اینکه بخاطر داشته باشیم که محاسبه شتاب یک ذره سیال در یک میدان سرعتی، نیاز به رابطه مشتق ویژه ای دارد، می توانیم آن را بصورت سمبلیک با رابطه $\frac{D\vec{V}}{Dt}$ نشان دهیم.

بنابراین :

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} \equiv \vec{a}_p = u \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t}$$

این مشتق را معمولاً مشتق ذاتی یا مشتق ذره می نامند.

از این معادله در می یابیم که یک ذره سیال که در یک میدان جریان حرکت می کند، ممکن است به دو علت شتاب گیرد. ممکن است شتاب گرفتن سیال ناشی از منتقل شدن سیال به یک منطقه با سرعت بالا (یا پائین) باشد. برای مثال در جریان ماندگار درون یک نازل، که برحسب تعریف، سرعت تابع زمان نیست، یک ذره سیال ضمن عبور از نازل شتاب می گیرد. که در آن ذره به یک منطقه با سرعت زیاد انتقال می یابد.

اگر یک جریان غیر ماندگار باشد، ذره سیال دستخوش یک شتاب مکانی (Local) علاوه بر شتاب قبلی خواهد شد، چون سرعت تابع زمان می باشد. بطور کلی مفهوم فیزیکی اجزاء معادله فوق بصورت زیر می باشند.

$$\vec{a}_p = \frac{D\vec{V}}{Dt} = \underbrace{u \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w \frac{\partial \vec{V}}{\partial z}}_{\text{شتاب انتقالی}} + \underbrace{\frac{\partial \vec{V}}{\partial t}}_{\text{شتاب موضعی}}$$

شتاب کلی يك ذره

شتاب انتقالی

شتاب موضعی

شتاب انتقالی ممکن است با بکار بردن عملگر شیب برداری، ∇ بصورت یک رابطه برداری نوشته شود. بنابراین:

$$u \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} = (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V}$$

بنابراین معادله شتاب یک ذره ممکن است بصورت زیر نوشته شود:

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} \equiv \vec{a}_p = (\vec{V} \cdot \nabla)\vec{V} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t}$$

برای یک جریان دو بعدی، که $\vec{V} = \vec{V}(x, y, t)$ است، معادله فوق کاهش می یابد به :

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = u \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t}$$

برای یک جریان یک بعدی، که $\vec{V} = \vec{V}(x, t)$ است، معادله فوق می شود.

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = u \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t}$$

در نهایت برای یک جریان ماندگار سه بعدی معادله بشکل زیر خواهد شد:

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = u \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w \frac{\partial \vec{V}}{\partial z}$$

که لزوماً صفر نیست. بنابراین یک ذره سیال حتی در یک میدان سرعتی ماندگار، ممکن است بر اثر حرکتش دستخوش یک شتاب انتقالی شود.

معادلی کلی شتاب، یک معادله برداری است و مثل همه معادلات برداری ممکن است بصورت مولفه های جزیی نوشته شود. در یک سیستم مختصات XYZ، اجزاء معادله شتاب بصورت زیر نوشته می شوند:

$$a_{xp} = \frac{Du}{Dt} = u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$a_{yp} = \frac{Dv}{Dt} = u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial t}$$

$$a_{xp} = \frac{Dw}{Dt} = u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial t}$$

اجزاء شتاب در مختصات استوانه ای با استفاده از رابطه سرعت (\vec{V}) در مختصات استوانه ای و استفاده از روابط مناسب، بصورت زیر استخراج می گردد.

$$a_{rp} = V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} - \frac{V_\theta^2}{r} + V_z \frac{\partial V_r}{\partial z} + \frac{\partial V_r}{\partial t}$$

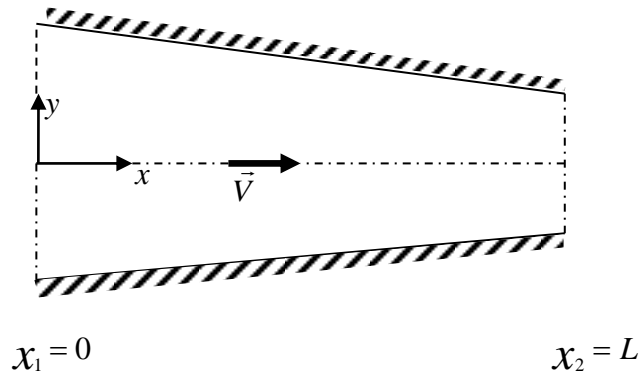
$$a_{\theta p} = V_r \frac{\partial V_\theta}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{V_r V_\theta}{r} + V_z \frac{\partial V_\theta}{\partial z} + \frac{\partial V_\theta}{\partial t}$$

$$a_{zp} = V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_z}{\partial \theta} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial t}$$

در این بخش، معادله شتاب برای یک ذره سیال در هر مکان میدان جریان بدست آمد. این روش بدست آوردن شتاب را روش **اولر** برای تعیین شتاب یک ذره گویند. در یک روش دیگر بنام روش **لاگرانژ**، حرکت (مکان، سرعت و شتاب) ذره بصورت تابعی از زمان شرح داده می شود. در مثال زیر این دو روش تعیین شتاب توضیح داده شده اند.

مثال : محاسبه شتاب ذره به روشهای **اولر** و **لاگرانژ**

یک جریان دو بعدی، ماندگار، غیر قابل تراکم عبوری از یک کانال همگرا (مطابق شکل زیر) فرض نمائید. سرعت در خط مرکزی افقی (محور x) با رابطه $\vec{V} = V_1 \left[1 + \frac{X}{L} \right] \hat{i}$ داده شده است. برای یک ذره که در حال حرکت در مسیر خط مرکزی است، شتاب را پیدا کنید. اگر از روش توضیح مکانیکی ذره استفاده کنیم، موقعیت ذره، واقع شده در $x=0$ در زمان $t=0$ تابعی از زمان می باشد، $x_p = f(t)$. رابطه ای برای $f(t)$ بدست آورید و سپس با مشتق گیری دوم از تابع نسبت به زمان، یک رابطه برای شتاب ذره در جهت x بدست آورید.



مثال :

داده ها : جریان ماندگار دو بعدی، غیر قابل تراکم عبوری از یک کانال بشکل همگرا

$$\vec{V} = V_1 \left(1 + \frac{x}{L}\right) \hat{i} \text{ روی محور } x \text{ ها}$$

خواسته ها :

الف : شتاب یک ذره در حال حرکت در طول محور x

ب : برای ذره واقع شده در $x = 0$ و در $t = 0$ ، یک رابطه پیدا کنید.

(۱) موقعیت، x_p ، بصورت تابعی از زمان

(۲) مولفه x شتاب (a_{xp}) بصورت تابعی از زمان

راه حل :

شتاب یک ذره که در حال حرکت در یک محیط سرعتی است، با رابطه زیر بیان می شود.

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = u \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t}$$

مولفه شتاب در جهت x ، با رابطه زیر بیان می شود:

$$\frac{Du}{Dt} = u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t}$$

برای هر ذره روی محور x ، $v = w = 0$ و $u = V_1 \left(1 + \frac{x}{L}\right)$ بنابراین

$$\frac{Du}{Dt} = u \frac{\partial u}{\partial x} = V_1 \left(1 + \frac{x}{L}\right) \frac{V_1}{L} = \frac{V_1^2}{L} \left(1 + \frac{x}{L}\right)$$

$$DV/Dt$$



برای تعیین شتاب یک ذره در هر نقطه درون جریان، فقط باید موقعیت ذره را در نتیجه فوق جایگزین نمائیم

در قسمت دوم مسئله، ما در تعقیب یک ذره منفرد (که با موقعیت $x = 0$ در $t = 0$ تعریف می شود) که درون کانال جریان دارد می باشیم.

مختصات x که موقعیت این ذره را نشان می دهد تابعی از زمان می باشد، $x_p = f(t)$ مضافاً اینکه، $u_p = \frac{df}{dt}$ تابعی از زمان می باشد. ذره، بسته به موقعیت آن دارای سرعتی درون میدان سرعتی می باشد. در $t = 0$ ، ذره در $x = 0$ است، و سرعت آن برابر با $u_p = V_1$ می باشد. با گذشت مدت زمان، t ، ذره به قسمت خروجی می رسد، در آن لحظه ذره سرعتی برابر $u_p = 2V_1$ خواهد داشت. برای یافتن رابطه $x_p = f(t)$ ، می نویسیم:

$$u_p = \frac{dx_p}{dt} = \frac{df}{dt} = V_1 \left(1 + \frac{x}{L}\right) = V_1 \left(1 + \frac{f}{L}\right)$$

با جدا کردن متغیرها داریم:

$$\frac{df}{\left(1 + \frac{f}{L}\right)} = V_1 dt$$

از آنجایی که در $t = 0$ ، ذره در موقعیت $x = 0$ واقع شده بود، و در زمان t ، این ذره در $x_p = f$ واقع شده است، بنابراین:

$$L \ln\left(1 + \frac{f}{L}\right) = V_1 t \quad \text{و} \quad \int_0^f \frac{df}{\left(1 + \frac{f}{L}\right)} = \int_0^t V_1 dt$$

پس

$$1 + \frac{f}{L} = e^{V_1 t / L} \quad \text{یا} \quad \ln\left(1 + \frac{f}{L}\right) = \frac{V_1 t}{L}$$

و

$$f = L \left[e^{V_1 t / L} - 1 \right]$$

پس موقعیت ذره ، واقع شده در $x = 0$ در $t = 0$ ، بصورت تابعی از زمان بوسیله رابطه زیر ارائه خواهد شد.

$$x_p = f(t) = L \left[e^{V_1 t / L} - 1 \right] \quad \leftarrow x_p$$

مولفه x شتاب این ذره، بوسیله رابطه زیر بدست می آید.

$$a_{xp} = \frac{d^2 x_p}{dt^2} = \frac{d^2 f}{dt^2} = \frac{V_1^2}{L} e^{V_1 t / L} \quad \leftarrow a_{xp}$$

اکنون برای ذره که در موقعیت $x = 0$ در $t = 0$ بود، دو راه مختلف برای بیان شتاب داریم. قابل توجه است که هر چند جریان ماندگار است، اما وقتی یک ذره بخصوص را تعقیب می نمائیم، موقعیت و شتاب (و سرعت) آن تابع زمان می باشند.

آزمایش می کنیم تا ببینیم که آیا هر دو رابطه برای شتاب نتایج یکسانی ارائه می کنند :

$$a_{xp} = \frac{V_1^2}{L} e^{V_1 t / L}$$

$$a_{xp} = \frac{Du}{Dt} = \frac{V_1^2}{L} \left(1 + \frac{X}{L} \right)$$

↓ در $x = 0$ ذره در $t = 0$

↓ در $x = 0$ $t = 0$ ← (a)

↓

$$a_{xp} = \frac{V_1^2}{L} e^0 = \frac{V_1^2}{L}$$

↓

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{V_1^2}{L} (1+0) = \frac{V_1^2}{L} \quad \leftarrow a$$

آزمایش b

↓ در $x = 0.5 L$

↓ وقتی $t = t_1$ $x_p = L/2$

↓

$$x_p = \frac{L}{2} = L \left[e^{V_1 t / L} - 1 \right]$$

↓

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{V_1^2}{L} (1+0.5)$$

↓

$$e^{V_1 t / L} = 1.5 \quad \text{بنابراین}$$

$$a_{xp} = \frac{V_1^2}{L}(1.5) = \frac{1.5V_1^2}{L} \quad \text{و}$$

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{1.5V_1^2}{L}$$

x = L در

(c) وقتی $t = t_2$ $x_p = L$

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{V_1^2}{L}(1+1)$$

$$x_p = L = L(e^{V_1 t_2 / L} - 1)$$



$$\frac{Du}{Dt} = \frac{2V_1^2}{L}$$



$$e^{V_1 t_2 / L} = 2$$

بنابراین



$$a_{xp} = \frac{V_1^2}{L} e^{V_1 t_2 / L}$$

و



$$a_{xp} = \frac{V_1^2}{L}(2) = \frac{2V_1^2}{L}$$

این مسئله، روشهای اولر و لاگرانژ را برای حرکت یک ذره سیال شرح داده است.

چرخش سیال

چرخش، $\vec{\omega}$ ، یک ذره سیال، بصورت متوسط سرعت زاویه ای دو خط عمود بر هم از ذره در یک صفحه قائم تعریف می شود. چرخش یک کمیت برداری است. یک ذره در حال حرکت در یک جریان سه بعدی، ممکن است حول همه محورهای مختصات چرخش کند. بنابراین بصورت کلی :

$$\omega = \hat{i} \omega_x + \hat{j} \omega_y + \hat{k} \omega_z$$

که در آن ω_x چرخشی حول محور X، ω_y ، چرخش حول محور Y و ω_z چرخش حول محور Z می باشند. مقدار مثبت چرخش بوسیله روش دست راست بیان می شود. برای بدست آوردن یک رابطه ریاضی برای چرخش سیال، حرکت یک ذره سیال در صفحه XY در نظر گرفته می شود. مولفه های سرعت در هر نقطه درون جریان بوسیله $u(x, y)$ و $v(x, y)$ نشان داده می شود. چرخش یک ذره سیال در چنین جریانی در شکل شرح داده شده است.

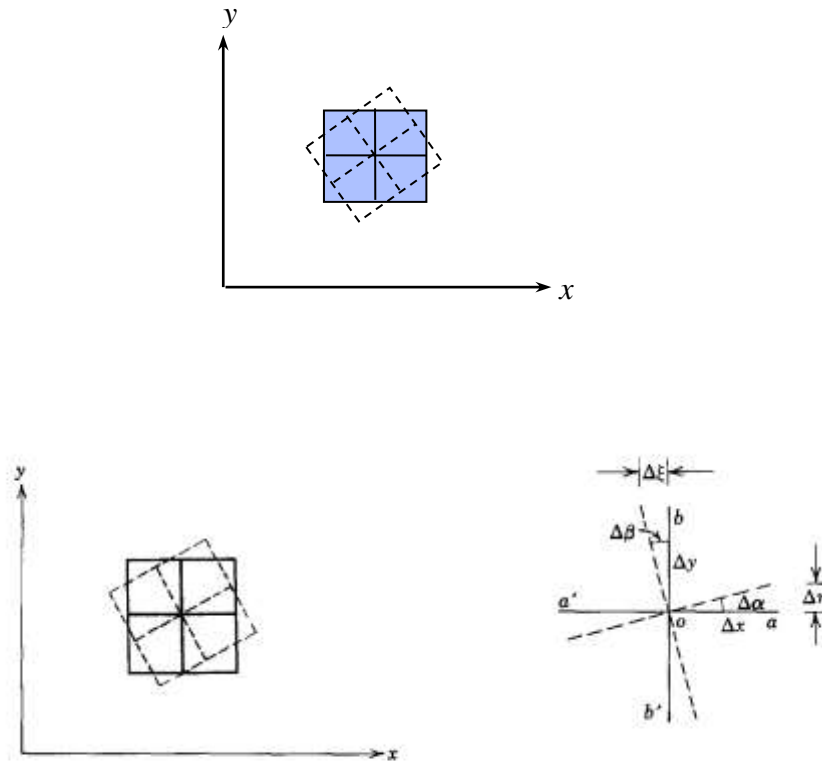


Fig. 5.7 Rotation of a fluid element in a two-dimensional flow field.

دو خط عمود برهم، oa و ob در صورتی در فاصله زمانی Δt به اندازه نشان داده شده در شکل چرخش می نمایند که سرعتها در نقاط a و b با سرعت در نقطه O متفاوت باشند. ابتدا چرخش خط oa با طول Δx را در نظر بگیرید. چرخش این خط، بدلیل تغییرات در مولفه سرعت در جهت y است. اگر مولفه سرعت در جهت y در نقطه O با v_0 داده شده باشد، پس می توان مولفه سرعت در جهت y و نقطه a را با استفاده از سری های تیلور بصورت زیر نوشت :

$$v = v_0 + \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x$$

سرعت زاویه ای خط oa برابر است ،

$$\omega_{oa} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \alpha}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \eta / \Delta x}{\Delta t}$$

از آنجایی که :

$$\Delta \eta = \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x \Delta t$$

$$\omega_{oa} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(\frac{\partial v}{\partial x}) \Delta x \Delta t / \Delta x}{\Delta t} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

چرخش خط ob ، با طول Δy ، از تغییرات مولفه سرعت در جهت X نتیجه می شود، اگر مولفه سرعت در جهت X در نقطه O با u_0 بیان شود. پس مولفه سرعت در جهت X در نقطه b با استفاده از سری های تیلور بشکل زیر می تواند نوشته شود.

$$u = u_0 + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y$$

سرعت زاویه ای خط ob برابر است با :

$$\omega_{ob} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \beta}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \xi / \Delta y}{\Delta t}$$

از آنجایی که :

$$\Delta \xi = -\frac{\partial u}{\partial y} \Delta y \Delta t$$

$$\omega_{ob} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{-\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) \Delta y \Delta t / \Delta y}{\Delta t} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

(علامت منفی برای مثبت در آمدن ω_{ob} بکار رفته است. مطابق علامت قراردادی که انتخاب کرده ایم، دوران در جهت مخالف حرکت عقربه ساعت مثبت می باشد.) دوران ذره سیال حول محور Z، برابر مقدار متوسط سرعت زاویه ای دو خط عمود برهم Oa و Ob ، در صفحه xy می باشد. بنابراین:

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

با در نظر گرفتن چرخش یک جفت خط عمود بر هم در صفحات YZ و XZ به روش مشابه می توان نشان داد که :

$$\omega_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad \text{و} \quad \omega_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right)$$

پس

$$\vec{\omega} = \hat{i}\omega_x + \hat{j}\omega_y + \hat{k}\omega_z = \frac{1}{2} \left[\hat{i} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \hat{j} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \hat{k} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right]$$

مقدار نشان داده شده در کروشه را می توانیم بصورت زیر بنویسیم :

$$\text{Curl } \vec{V} = \nabla \times \vec{V}$$

پس ، در نمادهای برداری می توانیم بنویسیم :

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \nabla \times \vec{V}$$

در چه شرایطی می توانیم انتظار جریان غیر چرخشی داشته باشیم ؟؟

یک ذره سیال در حال حرکت بدون چرخش، درون یک جریان نمی تواند بر اثر عمل نیروی داخلی یا نیروهای سطحی (فشار) شروع به چرخش نماید. ایجاد چرخش در یک ذره سیال، که ابتدا بدون چرخش است، نیاز به عمل نیروی برشی روی سطح ذره دارد. از آنجایی که تنش برشی، نسبتی از مقدار تغییر شکل زاویه ای ذره می باشد، یک ذره بدون چرخش بدون تغییر شکل زاویه ای همزمان ، نمی تواند شروع به چرخش نماید.

تنش برشی، به مقدار تغییر شکل زاویه ای ناشی از لزجت ارتباط دارد. وجود نیروهای لزجی می رساند که جریان چرخشی می باشد.

حالت بدون چرخش، ممکن است در مناطقی از جریان قابل فرض باشد که اثر نیروهای لزجی در آن مکانها قابل صرف نظر باشد. (برای مثال در جریان سیال روی یک سطح جامد، چنین منطقه ای خارج از لایه های مرزی وجود دارد.)

با تعریف گردابه (*Vorticity*) ، $\vec{\zeta}$ ، که دو برابر چرخش می باشد، می توان نوشت :

$$\vec{\zeta} = 2\vec{\omega} = \nabla \times \vec{V}$$

Vorticity (گردابه) یک روش اندازه گیری از چرخش یک ذره سیال در حال حرکت می باشد. در مختصات استوانه ای، گردابه برابر است با :

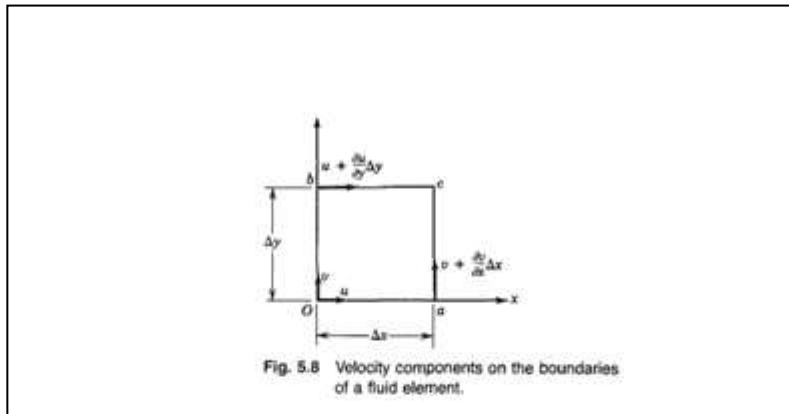
$$\nabla \times \vec{V} = \hat{e}_r \left(\frac{1}{r} \frac{\partial V_z}{\partial \theta} - \frac{\partial V_\theta}{\partial z} \right) + \hat{e}_\theta \left(\frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) + \hat{k} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial r V_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right)$$

Circulation سیرکولاسیون

سیرکولاسیون، که با Γ [capital gamma]، نشان داده می شود، بصورت انتگرال خطی مولفه های سرعت مماسی حول یک منحنی بسته ثابت در جریان تعریف می شود.

$$\Gamma = \oint_c \vec{V} \cdot d\vec{s}$$

که در آن $d\vec{s}$ بردار، طول ds ، مماس بر منحنی است، عدد مثبت، مربوط به مسیر خلاف عقربه های ساعت در اطراف منحنی است. رابطه بین سیرکولاسیون و چرخش می تواند با در نظر گرفتن ذره سیال شکل قبل بدست آید. این ذره در شکل زیر مجدداً نشان داده شده است.



شده، در

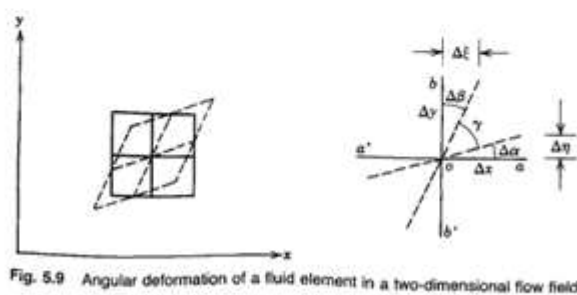
تغییرات سرعت نشان داده
برگیرنده مقادیر مشخص کننده

برای منحنی بسته oacb:

$$\Delta\Gamma = u\Delta x +$$

$$\Delta\Gamma = \left(\frac{\partial v}{\partial x} -$$

$$\Delta\Gamma = 2\omega_z \Delta$$



پس :

$$\Gamma = \oint_c \vec{V} \cdot d\vec{s} = \int_A 2\omega_z dA = \int_A (\nabla \times \vec{V})_z dA$$

معادله فوق، بیانگر تئوری استوکس در دو بعد است. بنابراین، سیرکولاسیون در اطراف یک مدار بسته (*closed contour*) برابر جمع گردابه (*Vorticity*) درون آن است.

مثال: جریانهای ورتکس آزاد و غیر آزاد
یک میدان جریان با حرکت کاملاً مماسی (خطوط جریان دایره ای) در نظر بگیرید:

$$V_r = 0 \quad \text{و} \quad V_\theta = f(r)$$

چرخش، گردابه و سیرکولاسیون برای دوران *rigid-body* (ورتنس اجباری) را ارزیابی نمائید.
نشان دهید که ممکن است $f(r)$ به گونه ای انتخاب شود که جریان غیر دورانی باشد (بطور مثال تا ورتکس آزاد تشکیل شود).

مثال

داده ها: میدان جریان با حرکت مماس (دایره ای)

$$V_r = 0, \quad V_\theta = f(r)$$

خواسته ها

(الف) چرخش، گردابه و سیرکولاسیون برای ورتنس اجباری
(ب) برای یک جریان غیر چرخشی (ورتنس آزاد) $f(r)$ را بدست آورید.
راه حل:

معادلات اساسی:

$$\vec{\zeta} = 2\vec{\omega} = \nabla \times \vec{V}$$

برای حرکت در صفحه $r\theta$ ، مولفه های چرخش و گردابه تنها در جهت Z می باشند.

$$\zeta_z = 2\omega_z = \frac{1}{r} \frac{\partial r V_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta}$$

چون در تمام نقاط این جریان، $V_r = 0$ است، این معادله به $\zeta_z = 2\omega_z = \frac{1}{r} \frac{\partial r V_\theta}{\partial r}$ کاهش می یابد.

$$V_\theta = \omega r$$

(الف) برای دوران با بدنه جامد

پس:

$$\zeta_z = 2\omega \quad , \quad \omega_z = \frac{1}{2} \frac{1}{r} \frac{\partial r V_\theta}{\partial r} = \frac{1}{2} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \omega r^2 = \frac{1}{2r} (2\omega r) = \omega$$

مقدار سیرکولاسیون می شود :

$$\Gamma = \oint_c \vec{V} \cdot d\vec{s} = \int_A 2\omega_z dA$$

از آنجایی که ثابت $\omega_z = \omega =$ مقدار سیرکولاسیون پیرامون هر مدار کنتور بسته، بوسیله رابطه $\Gamma = 2\omega A$ داده می شود که در آن A مساحت کنتور بسته می باشد. در نتیجه برای حرکت درون یک جداره جامد (ورتکس اجباری) ، مقادیر چرخش و گردابه ثابت هستند و مقدار سیرکولاسیون وابسته به مقدار سطح محصور توسط کنتور می باشد.

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r V_\theta = 0$$

(ب) برای جریان غیر چرخشی

با انتگرال گیری خواهیم داشت:

$$V_\theta = f(r) = \frac{c}{r} \quad \text{یا} \quad r V_\theta = \text{ثابت}$$

برای این جریان ، مبداء یک نقطه می باشد که در آن $V_\theta \rightarrow \infty$. مقدار سیرکولاسیون برای هر مسیر :

$$\Gamma = \oint_c \vec{V} \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} \frac{c}{r} r d\theta = 2\pi c$$

مقدار سیر کولاسیون در اطراف هر کنتور که شامل نقطه مبداء نباشد، صفر می باشد.

تغییر شکل سیال

تغییر شکل زاویه ای در یک ذره سیال، مستلزم تغییر در زاویه بین دو خط عمود برهم رسم شده در سیال است. مطابق شکل، مشاهده می شود که مقدار تغییر شکل زاویه ای ذره سیال، برابر کاهش زاویه بین دو خط $0a$ و $0b$ می باشد. مقدار تغییر شکل زاویه ای بوسیله رابطه زیر بیان می شود.

$$-\frac{d\gamma}{dt} = \frac{d\alpha}{dt} + \frac{d\beta}{dt}$$

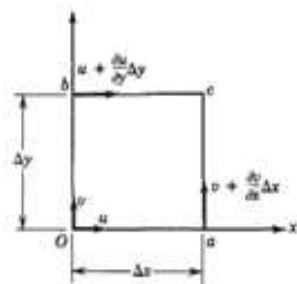


Fig. 5.8 Velocity components on the boundaries of a fluid element.

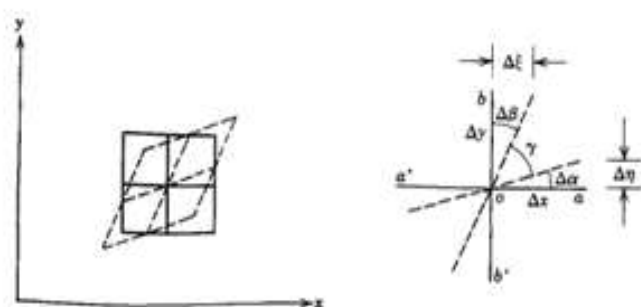


Fig. 5.9 Angular deformation of a fluid element in a two-dimensional flow field.

حال

$$\frac{d\alpha}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta n / \Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(\partial v / \partial x) \Delta x \Delta t / \Delta x}{\Delta t} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

و

$$\frac{d\beta}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\beta}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\xi / \Delta y}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(\partial u / \partial y) \Delta y \Delta t / \Delta y}{\Delta t} = \frac{\partial u}{\partial y}$$

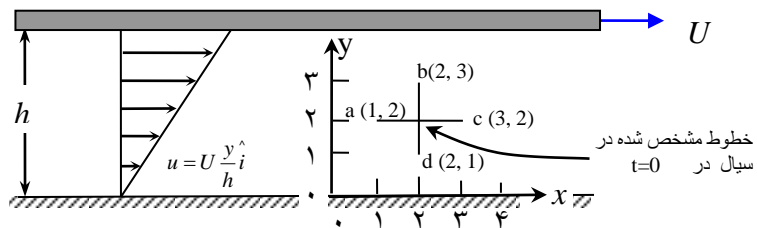
همزمان ، مقدار تغییر شکل زاویه ای در صفحه XY برابر است با :

$$\frac{d\alpha}{dt} + \frac{d\beta}{dt} = - \frac{dy}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

تنش برشی، به مقدار تغییر شکل زاویه ای درون سیال ارتباط دارد. در یک سیال لزج (حقیقی) (که در آن گرادیان سرعت وجود دارد)، درون میدان جریان بعید است که $\frac{\partial v}{\partial x}$ برابر و با علامت مخالف $\frac{\partial u}{\partial y}$ باشد. وجود نیروهای لزجی بمعنی این است که جریان دورانی است. محاسبه تغییر شکل زاویه ای برای یک میدان جریان ساده در مثال زیر شرح داده شده است.

مثال - چرخش در یک جریان لزج

یک جریان لزج در فاصله بین دو صفحه موازی بزرگ در شکل نشان داده شده است. توزیع سرعت در فاصله کوچک بین دو صفحه با رابطه $V = U \left(\frac{y}{h}\right) \hat{i}$ داده شده است. که در آن $U = 4 \text{ mm/s}$ و $h = 4 \text{ mm}$. در زمان $t = 0$ دو خط ac و bd بصورتیکه نشان داده شده، در سیال علامت گذاری شده اند. تعیین کنید موقعیت نقاط علامت گذاری شده را در $t = 1.5 \text{ s}$ و برای مقایسه آنها را رسم نمایید. مقدار تغییر شکل زاویه ای و مقدار دوران یک ذره سیال را در این میدان سرعتی حساب کنید. در مورد نتایج بدست آمده نظر بدهید.



مثال

داده ها: میدان سرعتی $h = 4 \text{ mm}, U = 4 \frac{\text{mm}}{\text{s}}. V = U \frac{y}{h} \hat{i}$

ذرات سیال در زمان $t=0$ علامت گذاری شده اند همانطور که نشان داده شده .

خواسته ها:

الف) موقعیت نقاط d', c', b', a' در $t = 1.5 s$ رسم شوند.

ب) مقدار تغییر شکل زاویه ای

ج) مقدار دوران یک ذره سیال

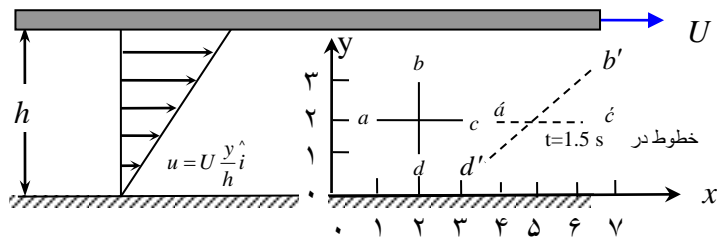
د) نظریه در مورد اهمیت این نتایج

راه حل: برای میدان جریان داده شده $v = 0$ ، بنابراین حرکت عمودی وجود ندارد.

سرعت هرنقطه ثابت باقی می ماند. لذا برای هرنقطه $\Delta x = u \Delta t$. در نقطه b ، $u = 3 \text{ mm/s}$ ، بنابراین

$$\Delta X_b = 3 \text{ mm/s} \times 1.5 \text{ s} = 4.5 \text{ mm}$$

نقاط a و c هرکدام 3 میلی متر و نقطه d ، 1.5 میلی متر حرکت می کنند. لذا ترسیم موقعیت نقاط در $t = 1.5 s$ می شود.



مقدار تغییر شکل زاویه ای:

$$-\dot{\gamma} = \frac{d\gamma}{dt} \rightarrow -\dot{\gamma} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = U \frac{1}{h} + 0 = \frac{U}{h} = 4 \text{ mm/s} \times \frac{1}{4} = 1 \text{ s}^{-1}$$

← $-\dot{\gamma}$

مقدار دوران برابر است با:

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \left(0 - \frac{U}{h} \right) = -\frac{1}{2} \times 4 \text{ mm/s} \times \frac{1}{4 \text{ mm}} = -0.5 \text{ s}^{-1}$$

← ω_z

جریان، چسبنده است. لذا تغییر شکل زاویه ای و دوران توأم روی می دهد، شکل و وضعیت یک ذره از سیال هردو تغییر نمودند.

در طول تغییر شکل خطی، از آنجایی که همه زوایا وضعیت خود را حفظ می کنند، شکل یک ذره سیال که بوسیله زاویه در رئوس نشان داده می شود، بدون تغییر باقی می ماند (همانطور که قبلاً در شکل نشان داده شد). اندازه ذره در جهت X ، در صورتی تغییر می نماید که $\frac{\partial u}{\partial x}$ صفر نباشد. بصورت مشابه، تغییر در بعد Y نیاز به غیر صفر بودن $\frac{\partial v}{\partial y}$ دارد و تغییر در بعد Z نیاز به غیر صفر بودن $\frac{\partial w}{\partial z}$ دارد. این مقادیر، اجزاء مقادیر کنشش در جهات z, y, x را نشان می دهند. تغییر در طول وجوه ممکن است تغییر در حجم ذره را سبب شود. لذا مقدار تاخیر حجم مکانی لحظه ای با رابطه زیر بیان می شود.

$$\text{مقدار تاخیر حجم} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \nabla \cdot \vec{V}$$

برای جریان غیر قابل تراکم، مقدار تاخیر حجم برابر صفر است.

مثال: مقدار تغییر شکل برای جریان در یک گوشه corner

میدان سرعت $\vec{V} = Ax\hat{i} - Ay\hat{j}$ بیانگر جریان در یک corner می باشد، همانطور که در مثال خطوط جریان نشان داده شد.

حالتی را که $A = 0.3 \text{ s}^{-1}$ است را در نظر بگیرید و مختصات نیز با متر اندازه گیری می شوند. همانطور که در شکل نشان داده شده، در زمان $t = 0$ یک مربع در سیال علامتگذاری شده است. تعیین کنید موقعیت جدید نقاط چهار گوشه را وقتی که بعد از τ ثانیه، نقطه a به $x = \frac{3}{2} \text{ m}$ جابجا شده باشد. مقدار تغییر شکل خطی را در جهات y, x تعیین کنید. سطح $a'b'c'd'$ در زمان $t = \tau$ را با سطح $abcd$ در زمان $t = 0$ مقایسه نمائید و در مورد نتایج نظر دهید.

داده ها:

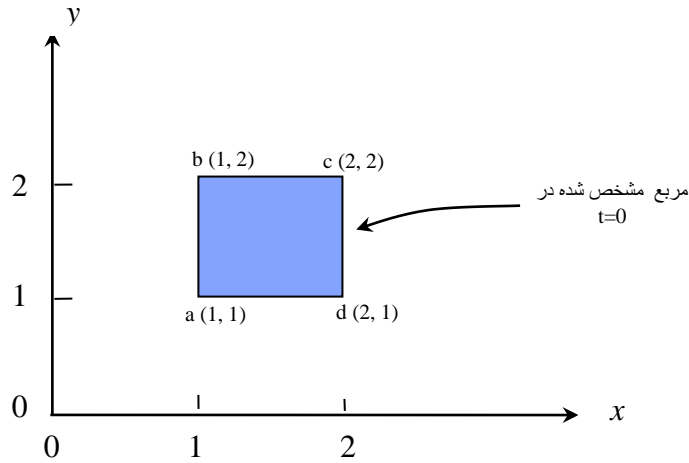
$$V = Ax\hat{i} - Ay\hat{j} \quad ; \quad A = 0.3 \text{ s}^{-1} \quad ; \quad y, x \text{ به متر}$$

خواسته ها:

الف: موقعیت مربع در زمان $t = \tau$ وقتی که a در موقعیت a' با $x = \frac{3}{2}$ متر است.

ب: مقدار تغییر شکل خطی

ج: مقایسه سطح $a'b'c'd'$ با سطح $abcd$
 د: نظر در مورد نتایج بدست آمده



راه حل : ابتدا باید τ را بیابیم، بنابراین باید ذره سیال را با بکارگیری روش لاگرانژ تعقیب نمائیم. پس :

$$u = \frac{\partial x_p}{\partial t} = Ax_p \quad \frac{dx}{x} = Adt \quad \int_{x_0}^x \frac{dx}{x} = \int_0^\tau Adt \quad \ln \frac{x}{x_0} = A\tau$$

$$\tau = \frac{\ln \frac{x}{x_0}}{A} = \frac{\ln(3/2)}{0.3 \text{ s}^{-1}} = 1.35 \text{ s}$$

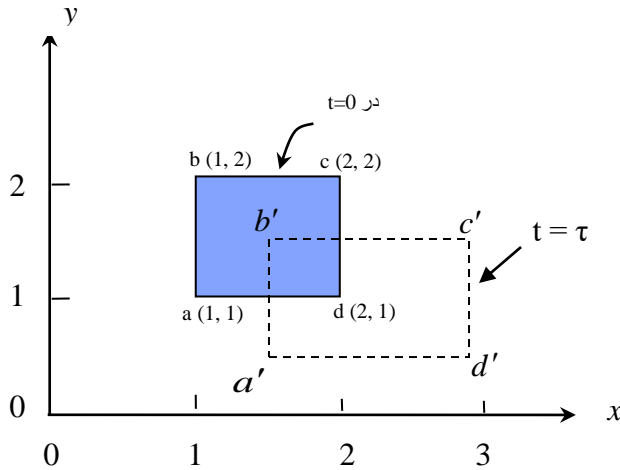
در جهت y :

$$v = \frac{dy_p}{dt} = -Ay_p \quad \frac{dy}{y} = -Adt \quad \frac{y}{y_0} = e^{-A\tau}$$

مختصات نقاط در زمان τ می شود:

نقطه	$t = 0$	$t = \tau$
a	(1, 1)	(3/2, 2/3)
b	(1, 2)	(3/2, 4/3)

c	(2, 2)	(3, 4/3)
d	(2, 1)	(3, 2/3)



مقدار تغییر شکل خطی :

$$x \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} Ax = A = 0.3 \quad s^{-1} \quad \text{در جهت } x$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (-Ay) = -A = -0.3 \quad s^{-1} \quad \text{در جهت } y$$

مقدار (چولگی) ، تغییر در حجم می شود:

$$\nabla \cdot \vec{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = A - A = 0$$

$$a'b'c'd' \text{ سطح} = abcd \quad (3 - 3/2)(4/3 - 2/3) = 1 \quad m^2 \quad , \quad \text{سطح} = 1 \quad m^2$$

قابل ذکر است که صفحات موازی بصورت موازی باقی می مانند، تغییر شکل خطی وجود دارد اما تغییر شکل زاویه ای نخواهیم داشت. مقدار تغییر شکل خطی در دو جهت مساوی و با علامت مخالف هستند، لذا سطح منطقه علامت گذاری شده تغییر نخواهد کرد.

در این بخش، نشان داده شد که میدان سرعتی دارای همه اطلاعات مورد نیاز برای تعیین شتاب، دوران، و تغییر شکل یک ذره در جریان می باشد.

مومنتم (اندازه حرکت)

معادله دینامیکی بیان کننده حرکت سیال، بوسیله کاربرد معادله دوم نیوتن برای یک ذره بدست می آید. برای استخراج شکل دیفرانسیلی معادله مومنتم، باید قانون دوم نیوتن را برای یک ذره سیال بینهایت کوچک، با جرم dm بکار ببریم. بیاد داریم که قانون دوم نیوتن برای یک سیستم محدود بوسیله رابطه زیر بیان می شود.

$$\bar{F} = \frac{d\bar{p}}{dt} \Bigg|_{system}$$

در این رابطه مومنتم خطی، \bar{p} ، سیستم بوسیله رابطه زیر بیان می شود:

$$p \text{ سیستم} = \int_{\text{جرم (سیستم)}} V dm$$

پس برای یک سیستم بینهایت کوچک با جرم dm ، معادله دوم نیوتن می تواند بصورت زیر نوشته شود.

$$d\bar{F} = dm \frac{d\bar{V}}{dt} \Bigg|_{\text{سیستم}}$$

با داشتن معادله بدست آمده برای شتاب یک ذره سیال با جرم dm ، که در یک میدان سرعتی در حال حرکت است، می توانیم معادله دوم نیوتن را بصورت معادله برداری زیر بنویسیم:

$$d\bar{F} = dm \frac{D\bar{V}}{Dt} = dm \left[u \frac{\partial \bar{V}}{\partial x} + v \frac{\partial \bar{V}}{\partial y} + w \frac{\partial \bar{V}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial t} \right]$$

حال نیاز است که یک فرمول مناسب برای نیرو، $d\bar{F}$ ، یا مولفه های آن، dF_x ، dF_y ، dF_z ، وارده بر ذره را بدست آوریم.

نیروی وارده بر یک ذره سیال

بیاد داریم که نیروهای وارده بر یک المان سیال، ممکن است به نیروهای سطحی (surface forces) و نیروهای ذاتی (body forces) تقسیم بندی شود.

نیروهای سطحی، شامل هر دو نیروهای نرمال و نیروهای مماسی (برشی) می گردد.

ما باید مولفه X نیروی وارده بر یک ذره دیفرانسیلی با جرم dm و حجم $dV = dx dy dz$ را در نظر بگیریم. تنها آن دسته از تنش هایی که در جهت X اثر می نماید، باعث ایجاد نیروهای سطحی در جهت X می شوند. اگر تنش ها در مرکز المان دیفرانسیلی به اندازه σ_{xx} ، τ_{yx} ، τ_{zx} داده شده باشند، می توان مقدار تنش وارده در جهت X بر همه وجوه المان (این مقادیر بوسیله کاربرد بسط سری های تیلور پیرامون مرکز المان بدست آمده اند)، را مطابق شکل زیر نشان داد.

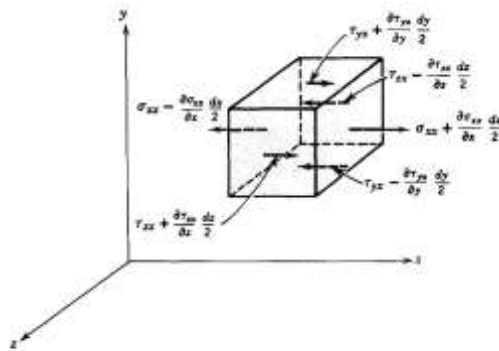
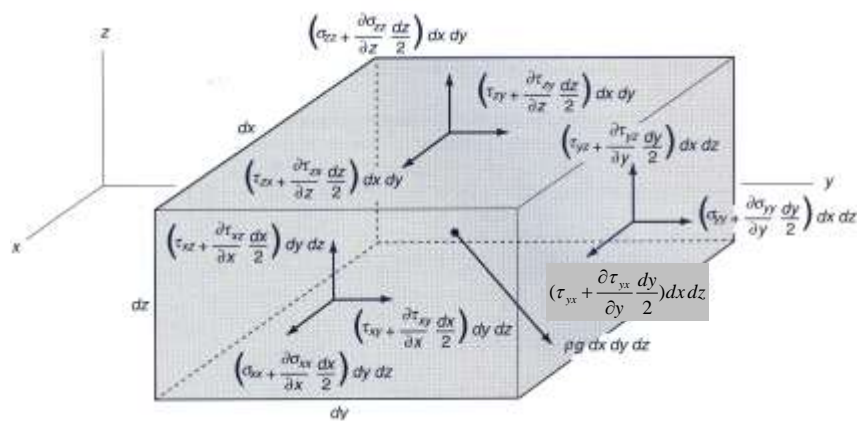


Fig. 5.10 Stresses in the x direction on an element of fluid.



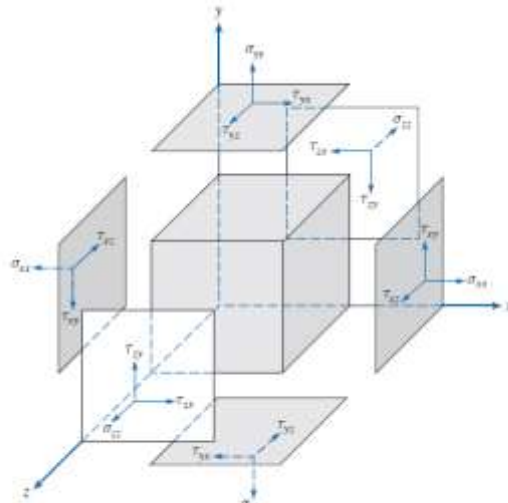


Fig. 2.8 Notation for stress.

برای بدست آوردن مقدار خالص نیروی سطحی (خارجی) در جهت x ، dF_{sx} باید نیروهای در جهت x را باهم جمع نمود. بنابراین :

$$dF_{sx} = \left(\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dy dz - \left(\sigma_{xx} - \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dy dz + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) dx dz - \left(\tau_{yx} - \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) dx dz + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \frac{dz}{2} \right) dx dy - \left(\tau_{zx} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \frac{dz}{2} \right) dx dy$$

با ساده کردن خواهیم داشت :

$$dF_{sx} = \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) dx dy dz$$

وقتی که نیروی ثقل، تنها نیروی درونی وارده باشد، پس نیروی درونی بر واحد جرم \bar{g} میباشد. مقدار نیروی خالص در جهت x ، dF_x ، بوسیله رابطه زیر ارائه می گردد.

$$dF_x = dF_{Bx} + dF_{Sx} = \left(\rho g_x + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) dx dy dz$$

به روش مشابه روابط مشابه ای برای مولفه نیرو در جهت های y ، z می توان بدست آورد .

$$dF_y = dF_{By} + dF_{Sy} = \left(\rho g_y + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) dx dy dz$$

$$dF_z = dF_{Bz} + dF_{Sz} = \left(\rho g_z + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right) dx dy dz$$

معادله دیفرانسیلی مومنتم

روابط مولفه های dF_x ، dF_y ، dF_z نیروی وارده بر یک المان به جرم dm استخراج گردید. اگر این معادلات، در مولفه های نیرو در جهات x ، y ، z (که قبلاً بدست آمدند) جایگزین شوند، معادلات دیفرانسیلی حرکت را بدست خواهیم آورد.

$$\rho g_x + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right)$$

$$\rho g_y + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right)$$

$$\rho g_z + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right)$$

معادلات فوق معادلات دیفرانسیلی حرکت برای هر سیال میباشند.

قبل از بکارگیری این معادلات برای حل مسائل، باید روابط مناسبی برای تنش ها بر حسب سرعت و فشار بدست آید.

سیال نیوتنی : معادلات ناویراستوکس

برای یک سیال نیوتنی، تنش ناشی از لزجت، نسبتی از مقدار تغییر شکل زاویه ای است. در دستگاه مختصات مستطیلی، تنش ها ممکن است با گرادیان سرعت ها و خواص سیال بصورت زیر بیان شوند.

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

$$\sigma_{xx} = -p - \frac{2}{3} \mu \nabla \cdot \vec{V} + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\sigma_{yy} = -p - \frac{2}{3} \mu \nabla \cdot \vec{V} + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\sigma_{zz} = -p - \frac{2}{3} \mu \nabla \cdot \vec{V} + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z}$$

که در آنها p فشار ترمودینامیک موضعی است.

اگر این معادلات در معادلات دیفرانسیلی حرکت (معادلات قبلی) قرار داده شوند، معادلات زیر نتیجه می شوند.

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \nabla \cdot \vec{V} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right]$$

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(2 \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{2}{3} \nabla \cdot \vec{V} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right]$$

$$\rho \frac{Dw}{Dt} = \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(2 \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3} \nabla \cdot \vec{V} \right) \right]$$

معادلات فوق، به نام معادلات ناویراستوکس نامیده می شوند. اگر این معادلات برای جریان غیر قابل تراکم با لزجت ثابت نوشته شوند، بسیار ساده خواهند شد.

در این حالتها، معادلات بشکل زیر خواهند شد.

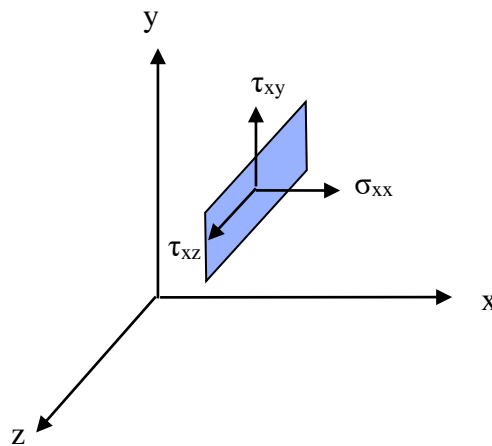
$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right)$$

$$\rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right)$$

برای حالتی که جریان بدون اصطکاک ($\mu = 0$) باشد، معادلات حرکت (ناویر استوکس)، به معادله اولر کاهش می یابد:

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \vec{g} - \nabla p$$



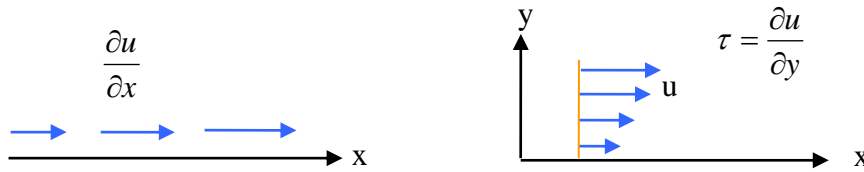
تنش های عمودی

$$\sigma_{xx} = \lim \frac{\delta F_x}{\delta A_x}$$

مولفه عمودی تنش، شامل تنش حاصل از لزجت و فشار ترمودینامیکی است.

تنش های عمودی لزجت، خود توابع خطی از سرعت های تغییر شکل خطی هستند و بنابراین در حالت کلی می توان نوشت:

$$\sigma_{xx} = \alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial v}{\partial y} + \gamma \frac{\partial w}{\partial z} + \bar{\sigma}$$



α, β, γ ضرایب ثابت اند و $\bar{\sigma}$ که تنش اصلی است، برابر است با :

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{3}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})$$

(در اغلب سیالات $\bar{\sigma} = -p$ است)

چون سیالات یکسانگرد فرض می شوند، باید $\frac{\partial v}{\partial y}$ و $\frac{\partial w}{\partial z}$ به نسبت مساوی در σ_{xx} موثر باشند، یعنی β, γ باید با هم مساوی باشند، پس اگر فرض کنیم:

$$\beta = \gamma = -\eta$$

خواهیم داشت :

$$\sigma_{xx} = (\alpha + \eta) \frac{\partial u}{\partial x} - \eta \nabla \cdot V - p$$

اگر مقدار $\alpha + \eta$ را برابر 2μ فرض کنیم، خواهیم داشت :

$$\sigma_{xx} = 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} - \eta \nabla \cdot V - p$$

μ ، همان ضریب لزجت سیال و η ضریب دوم لزجت است که مقدار آن نیز برای گازها برابر $\frac{2}{3}\mu$ در نظر گرفته می شود.

به طریق مشابه می توان سایر مولفه های تنش عمودی را به شکل زیر نوشت.

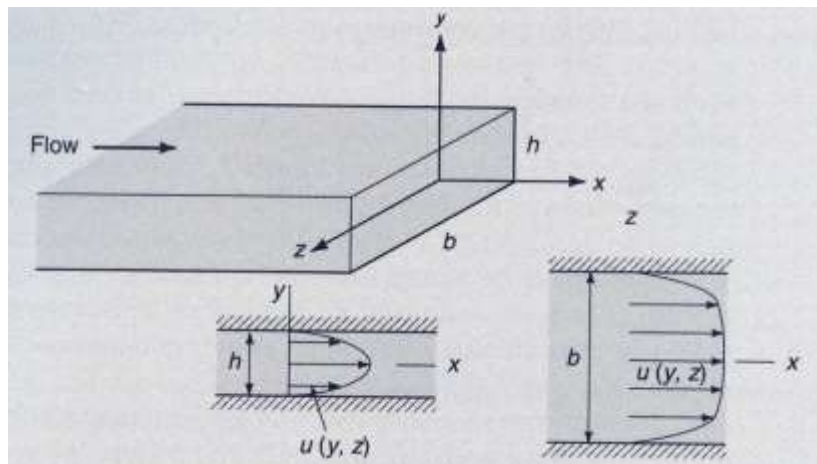
$$\sigma_{xx} = -p - \frac{2}{3}\mu \nabla \cdot \vec{V} + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\sigma_{yy} = -p - \frac{2}{3}\mu \nabla \cdot \vec{V} + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\sigma_{zz} = -p - \frac{2}{3}\mu \nabla \cdot \vec{V} + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z}$$

مثال

معادلات ناویر-استوکس را برای جریان درون یک کانال مستطیلی افقی ساده نمائید. خطوط جریان را موازی دیواره ها فرض نموده و محور x را در جهت جریان در نظر بگیرید. (شکل زیر)



راه حل:

اگر خطوط جریان موازی دیواره ها باشند تنها مولفه x سرعت صفر نیست. با توجه به اینکه $v=w=0$ بقاء جرم برای

جریان غیر قابل تراکم خواهد شد

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

با توجه به اینکه $u=u(x,y)$ رابطه شتاب خواهد شد

$$\frac{Du}{Dt} = u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t}$$

پس مولفه x معادله مومنتم (ناویر-استوکس) بشکل زیر ساده خواهد شد

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) = \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

یا

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

اگر جریان ماندگار نیز باشد اجزایی از معادله که تغییرات نسبت به زمان دارند صفر خواهند شد.

با داشتن شرایط مرزی مناسب و شرایط اولیه، معادله فوق قابل حل میباشد.

خلاصه موضوعات فصل

۱- شکل دیفرانسیلی معادله بقاء جرم

$$\nabla \cdot \rho \vec{V} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \text{الف) شکل برداری}$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \text{ب) مختصات مستطیلی}$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (r \rho V_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (\rho V_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial (\rho V_z)}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \text{ج) مختصات استوانه ای}$$

۲- ارائه معادله ریاضی برای یک میدان سرعت، تعیین کردن میدان یک جریان که غیرقابل تراکم باشد.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

۳- ارائه یک مولفه سرعت در یک میدان جریان دو بعدی، ارزیابی مولفه دیگر برای جریان ماندگار

غیرقابل تراکم

مثلاً:

$$u = Ax \rightarrow v = ?$$

$$\vec{V} = Ax\hat{i} - Ay\hat{j}$$

۴- تعریف تابع جریان، ψ برای یک میدان جریان دو بعدی، تعیین تابع جریان با داشتن میدان

سرعت، تعیین میدان سرعتی با داشتن تابع جریان

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$V_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad V_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r}$$

$$u dy - v dx = 0$$

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy$$

۵- تعیین شتابهای کلی، انتقالی و موضعی برای یک ذره سیال متحرک در یک میدان سرعتی

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = \vec{a}_p = \underbrace{u \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w \frac{\partial \vec{V}}{\partial z}}_{\text{انتقالی}} + \underbrace{\frac{\partial \vec{V}}{\partial t}}_{\text{مکانی}}$$

۶- شرح تعاریف، انتقال، دوران، تغییر شکل خطی و زاویه ای برای یک ذره سیال متحرک در یک میدان جریان

۷- تعریف دوران سیال، ورتکس و سیرکولاسیون

دوران $\vec{\omega} = \frac{1}{2} \nabla \times \vec{V} \quad \text{curl } \vec{V} = \nabla \times \vec{V}$

ورتکس $\vec{\zeta} = \nabla \times \vec{V}$

سیرکولاسیون $\Gamma = \oint_c \vec{V} \cdot d\vec{s} = \int_A 2\omega_z dA = \int_A (\nabla \cdot \vec{V})_z dA$

۸- شکل دیفرانسیلی معادله مومنتم برای جریان لزج و شرح معانی فیزیکی هر جزء از معادله

$$d\vec{F} = dm \frac{D\vec{V}}{Dt} = dm \left[u \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \right]$$

۹- معادلات ناویراستوکس

فصل سوم

مقدمه‌ای بر جریان‌های توربولانت

در طبیعت و در کاربردهای مهندسی در بسیاری از حالات جریان توربولنت رخ می‌دهد (تنکس و لاملی ۱۹۷۷) تعریف جریان متلاطم (توربولانت) کار مشکلی است اما جریان‌های متلاطم دارای این مشخصات هستند.

۱. بی قاعدگی: بی قاعدگی یا تصادفی بودن از لحاظ زمانی و مکانی (ما را نیازمند روشهای آماری می‌نماید)
۲. ایجاد پخشیدگی: اختلاط سریع حرارت، اندازه حرکت و ماده که از مشخصات مهم این جریان-هاست و باعث ادامه حیات می‌گردد.
۳. عدد رینالدز بالا: تنها در اعداد رینالدز بالا رخ می‌دهد. تلاطم با بالارفتن Re بعد از ناپایداری در جریان لامینار شکل می‌گیرد.
۴. نوسانات سه بعدی ورتیسیتی: چرخشی شدن و سه بعدی شدن جریان
۵. اتلاف انرژی: اتلاف انرژی جنبشی ناشی از تلاطم. تلاطم نیازمند مصرف انرژی است.
۶. پیوستگی: تلاطم حتی در مقیاس‌های کوچک نیز از قوانین پیوستگی تبعیت می‌کند.
۷. جریان: تلاطم یکی از ویژگی‌های جریان سیال است نه مشخصه‌ای از خود سیال.

جریان در یک لوله

$$R = \frac{VD}{\nu} \quad \text{عدد رینالدز} \quad (۱)$$

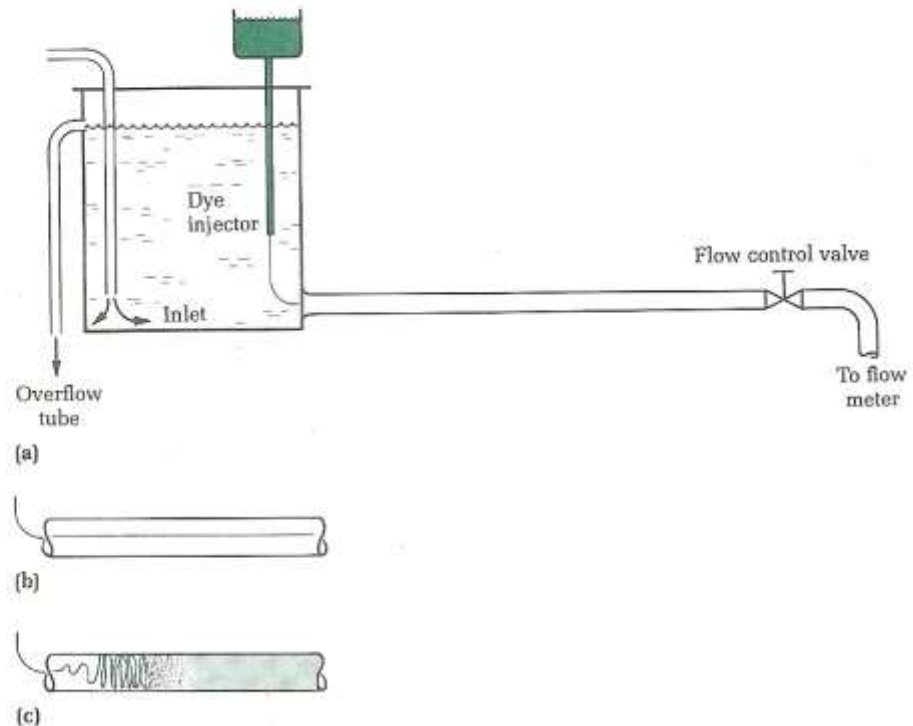
$R < 2100$ جریان لامینار

$R > 4000$ جریانات توربولانت

شکل ۱ آزمایش رینالدز (الف) و جریان لامینار (ب) و جریان توربولانت (ج) را نشان می‌دهد

FIGURE 1

An experiment for visualizing laminar and turbulent flow.



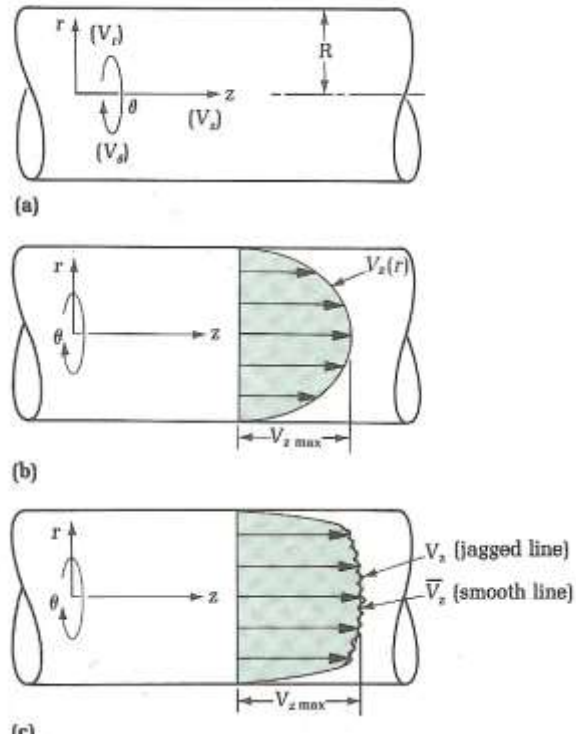
چون توزیع سرعت در جریان های لامینار و توربولانت کاملاً متفاوت است لذا تفکیک بین این دو نوع جریان بسیار مهم است. شکل ۲ (الف) سیستم دستگاه مختصات را برای جریان در یک لوله را نشان می دهد. برای مثال جهت نشان دادن سرعت ها، همانطور که نشان داده شده، در یک مجرای بسته سه مولفه سرعت لحظه ای مختلف می تواند وجود داشته باشد- یک سرعت برای هر کدام از سه جهت مختصاتی اصلی. علاوه بر این، هر کدام از این سرعت ها می توانند نسبت به سه جهت فضایی و زمان نیز وابسته باشند. اگر جریان در یک لوله لامینار باشد، تنها یک سرعت لحظه ای غیرصفر وجود دارد: V_z . همچنین، V_z تنها تابع محور شعاعی r است و توزیع سرعت نیز سهومی است، همانطور که در شکل ۲ (ب) نشان داده شده است. معادله این توزیع سرعت می تواند با معادلاتی که قبلاً دیده ایم استخراج گردد. برای تحلیل تلاطم بهتر است روی ذرات سیال بحث شود. مشاهده شده که این ذرات در توده های سیال در حال حرکت تحت عنوان گرداب (ادی)، با ابعاد مختلف به طور تصادفی جابه جا می شوند، این گرداب ها در هر نقطه از جریان، نوسانات سریع و نامنظم سرعت در اطراف مقدار سرعت میانگین ایجاد می کنند.

اگر جریان توربولانت باشد هر سه سرعت لحظه ای V_r ، V_θ و V_z غیرصفر هستند. مضافاً اینکه، هر کدام از این سرعت ها تابعی از همه سه جهت فضایی و زمان نیز می باشند. برای سرعت های (V_r, V_θ, V_z) . از معادلات حرکت نمی توان معادله ای استخراج کرد. بنابراین، برای بدست آوردن سرعت محوری، برای یک

لحظه خاص، باید از مقادیر تجربی بهره جست. شکل ۲ (ج) سرعت لحظه‌ای محوری V_z را برای یک جریان توربولانت در یک لوله نشان می‌دهد.

FIGURE 2

(a) Cylindrical coordinates and velocity directions in a tube.
 (b) Axial velocity distribution for laminar flow in a tube.
 (c) Axial velocity distribution for turbulent flow in a tube.

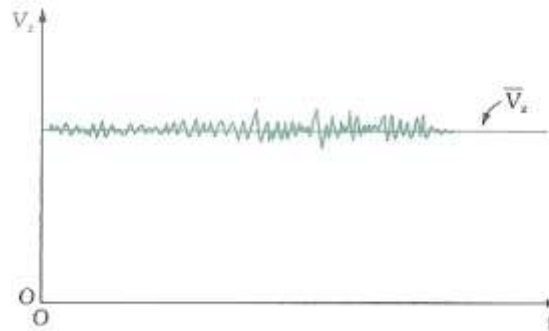


سرعت لحظه‌ای V_z نوسانات تصادفی پیرامون سرعت متوسط محوری \bar{V}_z دارد. برای ثبت V_z دستگاه‌های اندازه‌گیری بسیار حساسی نیاز است اما برای ثبت \bar{V}_z دستگاه‌های نسبتاً غیرحساس کافی است. اگر پروفیل سرعت در جریان توربولانت نشان داده شده در شکل ۲ (ج) در لحظه دیگری از زمان برداشت شود پروفیل لحظه‌ای متفاوت دیگری (V_z) نتیجه خواهد شد. بنابراین سرعت متوسط محوری با خارج کردن تابع زمان (با انتگرال‌گیری و در صورت شناخت ارتباط) از سرعت لحظه‌ای V_z می‌تواند بدست آید. تابع زمان با مشاهده ارقام در محور مورد نظر یا جهت Z در یک نقطه خاص (مثلاً مرکز لوله) بصورت تابعی از زمان (شکل ۳ را ملاحظه نمایید) قابل دسترسی است.

مطابق آنچه گفته شد، سرعت محوری V_z در جریان توربولانت پیرامون سرعت متوسط نوسان می‌کند. بطور کلی، نوسانات از نظر مقدار کوچک هستند، اما این نوسانات سبب می‌شوند تا ذراتی که در نواحی با سرعت کم مقطع لوله با ذرات در حال حرکت در نواحی پر سرعت جابجا شوند. این پدیده در تقابل وضعیتی است که در جریان لامینار (که در آن ذرات در هر لایه در همان لایه باقی می‌مانند) رخ می‌دهد.

FIGURE 3

Variation of centerline axial velocity with respect to time (turbulent flow).



نوسانات در جریان توربولانت دلیل اصلی وجود اختلاط می باشند که در خیلی از پروفیل های سرعت نسبت به جریان های لامینار مشاهده می شوند. همچنین دلیل پخش رنگ در لوله آزمایش رینالدز (شکل ۱ ج)) همین نوسانات سرعت می باشد، برای هر دو جریان لامینار و توربولانت، حداکثر سرعت در جهت محور، $V_{z,max}$ ، در محور مرکزی مجرا رخ می دهد. ملاحظات مربوط به جریان های لامینار توربولانت در جدول ۱ خلاصه شده اند.

TABLE 1 Comparison of Laminar and Turbulent Flow

Laminar Flow	Parameter	Turbulent Flow
V_z only; $V_r = V_\theta = 0$ $V_z = V_z(r)$ only	Velocity	V_r, V_θ, V_z all nonzero
Parabolic (see above); solution from equation of motion	Functional dependence	$V_r = V_r(r, \theta, z, t)$ $V_\theta = V_\theta(r, \theta, z, t)$ $V_z = V_z(r, \theta, z, t)$
$\frac{V_z}{V_{z,max}} = 1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2$ $\frac{V}{V_{z,max}} = \frac{1}{2}$ for $Re \leq 2100$	Velocity distribution	Determined from experimental data
	Equation	$\frac{\bar{V}_z}{V_{z,max}} \approx \left(1 - \frac{r}{R}\right)^{1/7}$ $\frac{\bar{V}}{V_{z,max}} \approx \frac{4}{5}$ for $5 \times 10^3 \leq Re \leq 10^7$

Note: V = average velocity in principal flow direction.

برای تشخیص جریان های لامینار و توربولانت از عدد رینالدز استفاده می شود. (معادله ۱) سرعت مورد استفاده در رابطه عدد رینالدز سرعت متوسط V است. در اصل سرعت متوسط با انتگرال گیری از سرعت لحظه ای V_z در کل سطح مقطع و تقسیم آن بر سطح مقطع بدست می آید. این روال برای جریان-

های لامینار، بینابین و توربولانت صحیح است. اگر معادله سرعت در دسترس نباشد آنوقت مقادیر تجربی برای پیدا کردن سرعت متوسط مورد نیاز خواهد بود. در ساده‌ترین حالت، (برای سیالات غیرقابل تراکم) می‌توان با داشتن دبی جریان و تقسیم آن بر سطح، سرعت متوسط را استخراج کرد.

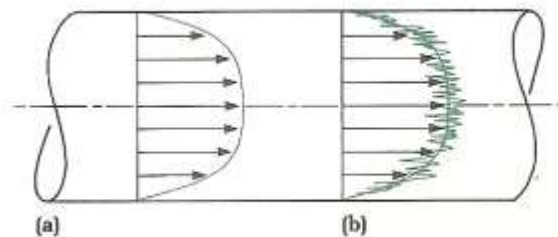
$$V = \frac{Q}{A}$$

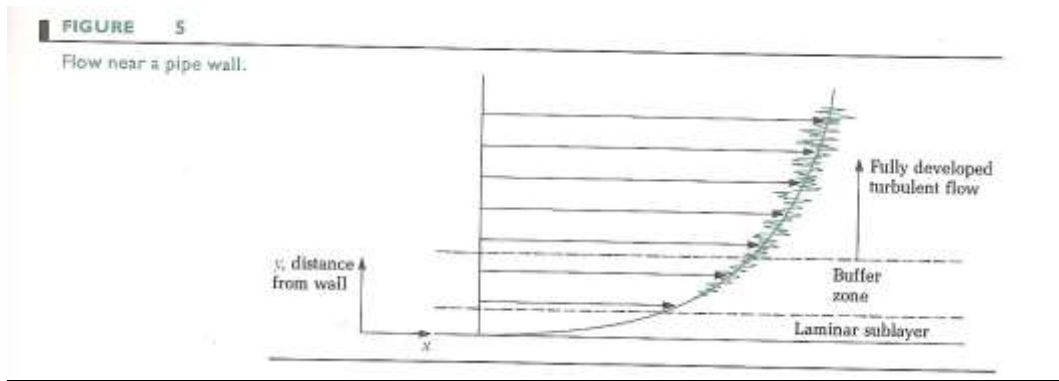
در شکل ۴ جریان توربولانت در یک لوله نشان داده شده است. اگر مقدار سرعت در هر نقطه از سطح مقطع با لوله استاتیک پیتوت اندازه‌گیری شود نتیجه مانند شکل ۴ (الف) خواهد بود. اگر یک وسیله حساس‌تر مانند سرعت سنج سیم داغ مورد استفاده قرار گیرد توزیع سرعت مانند شکل ۴ (ب) خواهد بود. سرعت لحظه‌ای در هر نقطه حول مقدار متوسط نوساناتی تصادفی خواهد داشت.

جریان لامینار زمانی رخ می‌دهد که عدد رینالدز از ۲۱۰۰ کمتر باشد. بالاتر از ۲۱۰۰ اگر دیواره لوله صاف باشد جریان لامینار می‌تواند حفظ شود و نوسانات وجود نخواهد داشت. هر عامل آشفتگی می‌تواند سبب جریان توربولانت گردد. قابل ذکر است که برای جریان توربولانت، در نواحی نزدیک دیواره، جریان تصادفی نیست. در جایی که سرعت به سمت صفر است وضعیت جریان تفاوت می‌کند. معمولاً سه ناحیه در لوله قابل مشاهده است همانطور که در شکل ۵ نشان داده شده است. در منطقه وسط لوله جریان توربولانت توسعه یافته کامل وجود خواهد داشت. در نزدیک دیواره لوله زیر لایه لامینار شکل می‌گیرد در جاییکه قانون لزوجت نیوتنی وضعیت جریان را در دست می‌گیرد. بین این دو ناحیه منطقه حائل (بینابینی) وجود خواهد داشت که در آن اثرات هر دو وضعیت لامینار و توربولانت اهمیت دارد.

FIGURE 4

Turbulent flow in a tube.





حال به بررسی جزئیات نوسانات سرعت که در شکل ۴ (ب) نشان داده شده می‌پردازیم. فرض کنیم با یک وسیله حساس سرعت در یک نقطه از یک لوله که جریان توربولانت در آن جریان دارد اندازه‌گیری شده است. نتیجه حاصله بصورت شماتیک در شکل ۶ نشان داده شده است. دو سرعت قابل تشخیص است: سرعت متوسط \bar{V}_z ، که مقدار متوسط است. و سرعت لحظه‌ای V_z ، که بصورت تصادفی پیرامون مقدار متوسط نوسان دارد. سرعت لحظه‌ای می‌تواند هموارسازی زمانی شده تا مقدار متوسط بدست آید. این بدین معنی است که اگر از سرعت لحظه‌ای در یک فاصله زمانی متوسط گیری شود مقدار سرعت متوسط نتیجه خواهد شد. با توجه به تعریف داریم:

$$\bar{V}_z = \frac{1}{t} \int_0^t V_z dt \quad (2)$$

سرعت لحظه‌ای تابع متغیر همه سه جهت فضایی و زمان است. با استفاده از معادله 2، انتگرال‌گیری نسبت به زمان را در اختیار داریم. سرعت متوسط و سرعت لحظه‌ای تفاوتی به اندازه نوسان سرعت V_z دارند. رابطه ریاضی به شکل زیر است.

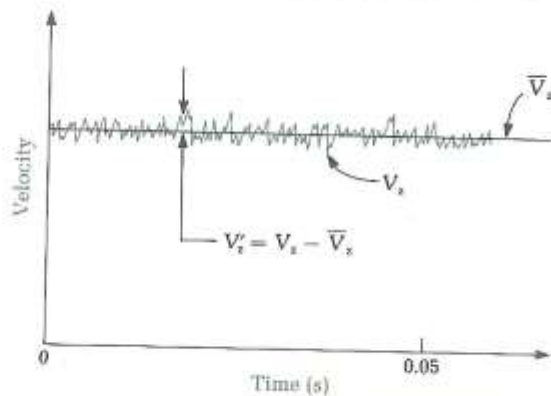
$$V_z = \bar{V}_z + V'_z \quad (3)$$

با جایگزینی در رابطه ۲ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \bar{V}_z &= \frac{1}{t} \int_0^t \bar{V}_z dt + \frac{1}{t} \int_0^t V'_z dt \\ &= \frac{\bar{V}_z}{t} \int_0^t dt + \frac{1}{t} \int_0^t V'_z dt \end{aligned}$$

FIGURE 6

Velocity at a point in a turbulent flow.



$$\bar{V}_z = \bar{V}_z + \frac{1}{t} \int_0^t V'_z dt$$

یا

در نتیجه می توان نوشت که متوسط نوسانات نسبت به زمان صفر است. یعنی:

$$\frac{1}{t} \int_0^t V'_z dt = \bar{V}'_z = 0 \quad (4)$$

با دستکاری بعدی مشخص می شود که $\bar{V}'_z \neq 0$ است. جذر این مقدار $\sqrt{V_z'^2}$ معیاری از شدت نوسانات تلاطم یا مقدار انحراف V'_z از \bar{V}_z است. مقدار شدت نسبی تلاطم اندازه گیری شده بصورت زیر تعریف شده است.

$$\text{شدت توربولانس} = \frac{\sqrt{V_z'^2}}{\bar{V}} \quad (5)$$

که در آن \bar{V} مقدار متوسط زمانی سرعت می باشد شدت آشفتگی (توربولانس) در جریان درون لوله ها از ۱٪ تا ۱۰٪ متغیر است. به روش مشابه عمل هموارسازی (time-smoothing operation) می تواند برای فشار در هر نقطه که بر اثر جریان توربولانت نوسانات وجود دارد انجام گردد.

حال می توانیم هموارسازی را برای معادلات حرکت معروف به معادلات پیوستگی و ناویر استوکس (برای سیالات غیر قابل تراکم و با لزوجت ثابت) بکار بگیریم. برای انجام این کار بجای V_i مقدار $\bar{V}_i + V'$

و بجای p معادله پیوستگی

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

معادله ناویر استوکس

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right)$$

با انتگرال گیری همانطور که در معادله ۲ نشان داده شد نتایج برای جریان توربولانت غیرقابل تراکم ماندگار به شکل زیر خواهد شد:

معادله پیوستگی

$$\frac{\partial(\bar{V}_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{V}_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\bar{V}_z)}{\partial z} = 0 \quad (6)$$

معادلات حرکت

مولفه x

$$\begin{aligned} & \rho \left(\bar{V}_x \frac{\partial \bar{V}_x}{\partial x} + \bar{V}_y \frac{\partial \bar{V}_x}{\partial y} + \bar{V}_z \frac{\partial \bar{V}_x}{\partial z} \right) \\ &= -\frac{\partial(\bar{p})}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 \bar{V}_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{V}_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{V}_x}{\partial z^2} \right) \\ & \quad - \frac{\partial}{\partial x} (\rho \overline{V'_x V'_x}) - \frac{\partial}{\partial y} (\rho \overline{V'_x V'_y}) - \frac{\partial}{\partial z} (\rho \overline{V'_x V'_z}) + \rho g_x \end{aligned} \quad (7)$$

مولفه y

$$\begin{aligned} & \rho \left(\bar{V}_x \frac{\partial \bar{V}_y}{\partial x} + \bar{V}_y \frac{\partial \bar{V}_y}{\partial y} + \bar{V}_z \frac{\partial \bar{V}_y}{\partial z} \right) \\ &= -\frac{\partial(\bar{p})}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 \bar{V}_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{V}_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{V}_y}{\partial z^2} \right) \\ & \quad - \frac{\partial}{\partial x} (\rho \overline{V'_x V'_y}) - \frac{\partial}{\partial y} (\rho \overline{V'_y V'_y}) - \frac{\partial}{\partial z} (\rho \overline{V'_y V'_z}) + \rho g_y \end{aligned} \quad (8)$$

مولفه z

$$\begin{aligned} & \rho \left(\bar{V}_x \frac{\partial \bar{V}_z}{\partial x} + \bar{V}_y \frac{\partial \bar{V}_z}{\partial y} + \bar{V}_z \frac{\partial \bar{V}_z}{\partial z} \right) \\ &= -\frac{\partial(\bar{p})}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 \bar{V}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{V}_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{V}_z}{\partial z^2} \right) \\ & \quad - \frac{\partial}{\partial x} (\rho \overline{V'_x V'_z}) - \frac{\partial}{\partial y} (\rho \overline{V'_y V'_z}) - \frac{\partial}{\partial z} (\rho \overline{V'_z V'_z}) + \rho g_z \end{aligned}$$

(۹)

این معادلات مشابه معادلات ناویر استوکس هستند با این تفاوت که سرعت‌های متوسط زمانی جایگزین سرعت‌های لحظه‌ای شده‌اند. علاوه بر این در این معادلات فشار متوسط زمانی استفاده شده است. در نهایت، پارامترهای جدیدی نیز مشاهده می‌شوند. این پارامترهای جدید (موکداً) به آشفتگی نوسانات سرعت وابسته‌اند. دیمانسیون حاصلضرب $\rho V V$ نیرو در واحد سطح است. بنابراین بهتر است نمادهای زیر تعریف شوند.

$$\begin{aligned}\bar{\tau}_{xx}^{(t)} &= \overline{\rho V'_x V'_x} \\ \bar{\tau}_{xy}^{(t)} &= \overline{\rho V'_x V'_y} \\ \bar{\tau}_{xz}^{(t)} &= \overline{\rho V'_x V'_z}\end{aligned}\tag{10}$$

و به همین ترتیب برای سایر نمادها می‌شود تعریف را ادامه داد. این ترم‌ها معمولاً **تنش‌های رینالدزی** نامیده می‌شوند و بیانگر آشفتگی شار مومنتم می‌باشند. به شکل برداری معادله پیوستگی و معادلات حرکت به شکل زیر خواهند شد.

معادله پیوستگی

$$\nabla \cdot V = 0\tag{11}$$

معادله حرکت:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + (V \cdot \nabla)V = -\frac{\nabla p}{\rho} - \nabla g + \nu \nabla^2 V + \nabla \cdot \underline{\rho V' V'}\tag{12}$$

که در آن V سرعت‌های متوسط برداری و $V V'$ توربولانت نوسانات سرعت‌ها می‌باشند. برای بکارگیری معادلات ۶ تا ۹ در جریان‌های مختلف و بدست آوردن توزیع سرعت، نیاز است تا تنش‌های رینالدز به مقدار (strain) کرنش (تغییر شکل زاویه ای) درون سیال مرتبط شود. برای جریان لامینار، تنش‌های برشی توسط قانون لزوجت نیوتن به مقدار کرنش ارتباط می‌یابند: $\tau_{yx} = -\mu \left(\frac{dV_x}{dy} \right)$. برای توربولانت جریان می‌توانیم رابطه‌ای مشابه به شکل زیر بنویسیم:

$$\bar{\tau}_{yx}^{(t)} = -\mu^{(t)} \frac{d\bar{V}_x}{dy} \quad (13)$$

که در آن $\mu^{(t)}$ ضریب لزوجت توربولانت می باشد، که لزوجت ادی نیز خوانده می شود. به این ترتیب کل تنش برشی می شود:

$$\bar{\tau}_{yx} = \bar{\tau}_{yx}^{(\ell)} + \bar{\tau}_{yx}^{(t)}$$

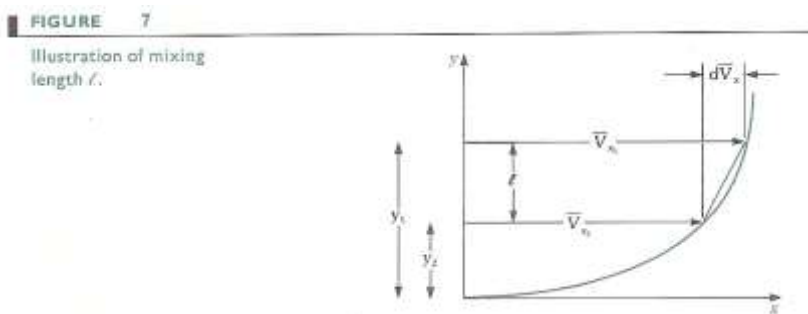
$$\bar{\tau}_{yx} = -\mu \frac{d\bar{V}_x}{dy} - \mu^{(t)} \frac{d\bar{V}_x}{dy}$$

که در آن μ لزوجت سیال است که نتیجه حرکت مولکولی است و $\mu^{(t)}$ لزوجت ادی (یا گردابه) است که نتیجه حرکت های ادی در جریان توربولانت است. از نظر فیزیکی، این نوع حرکات دلالت دارد بر اینکه همانطور که فعالیت مولکولی دلیل تنش لزوجتی است به همین ترتیب تنش توربولانت نتیجه ادی ها است.

این مفهوم نتیجه نیمه تجربی مطالعات اخیر در خصوص جریان توربولانت است.

دومین رابطه تجربی (که پیشنهادی پراندتل است) می تواند با فرض اینکه ادی ها در هر سیال به گونه ای اطراف خود حرکت می کنند که ملکولها اطراف خود در گازها حرکت می نمایند. براین اساس نظریه طول اختلاط ارایه شد که در شکل ۷ توضیح داده شده است. دو نقطه y_1 و y_2 ، از یک لایه مرزی که در قسمت توربولانت یک جریان قرار دارند انتخاب شده اند. این دو نقطه فاصله ℓ را از هم دارند که برابر اندازه متوسط ادی ها است:

$$y_1 - y_2 = \ell$$



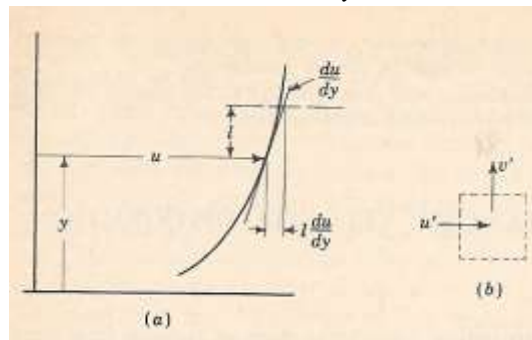
توجه:

در رابطه $\tau_t = \rho u'v'$ پرناتل چنین استدلال کرد که عبارات بیان کننده u' و v' بر حسب طول اختلاط ℓ و گرادیان سرعت $\frac{du}{dy}$ که در آن u سرعت متوسط لحظه ای در یک نقطه و y فاصله عمودی تا u است (معمولاً از مرز جریان اندازه گرفته می شود) تعیین می گردند. در گازها یک ملکول قبل از برخورد به ملکول دیگر فاصله متوسطی را طی می نماید که موسوم به مسیر متوسط پویش آزاد گاز است. با استفاده از این موضوع به عنوان یک تشابه (شکل زیر الف) پرناتل فرض کرد که یک ذره از سیال قبل از اینکه دچار تغییر اندازه حرکت به دلیل محیط جدید خود گردد، به اندازه فاصله ℓ جابجا می شود. در نتیجه نوسان u' به وسیله رابطه زیر به ارتباط دارد:

$$u' \approx \ell \frac{du}{dy}$$

این رابطه بدان معنی است که مقدار تغییر در سرعت به تغییر در سرعت متوسط لحظه ای بین دو نقطه به فاصله ℓ از یکدیگر در جهت y بستگی دارد. با بهره گیری از معادله پیوستگی، پرناتل چنین استدلال کرد که باید ارتباطی میان u' و v' (شکل زیر ب) وجود داشته باشد و لذا v' متناسب با u' است.

$$v' \approx u' \approx \ell \frac{du}{dy}$$



شکل - نمایش تئوری طول اختلاط

با جایگزینی u' و v' در معادله $\tau = \rho u'v'$ و در نظر گرفتن ضریب تناسب در ℓ معادله تعریف کننده طول اختلاط بدست می آید.

$$\tau = \rho \ell^2 \left(\frac{du}{dy} \right)^2$$

سرعت های هموار سازی شده زمانی مربوط به y_1 و y_2 برابر \bar{V}_{x1} و \bar{V}_{x2} هستند. می توان استدلال نمود که

نوسان آشفتگی مثبت در راستای عمودی در y_2 (V'_{y2}) سبب کاهش در مؤلفه در جهت X (یعنی سرعت لحظه‌ای در y_1) (V_{x1}) می‌گردد.

کاهش V'_{x1} تقریباً برابر تفاوت در مقدار سرعت‌های متوسط مربوطه است. بنابراین در y_1

$$V'_{x1} \approx \bar{V}_1 - \bar{V}_2 \approx \ell \frac{d\bar{V}_x}{dy}$$

تنش برشی $\bar{\tau}_{yx}^{(t)}$ می‌شود (از معادله ۱۰)

$$\bar{\tau}_{yx}^{(t)} = \rho \overline{V'_x V'_y} \approx \rho V'_y \ell \frac{d\bar{V}_x}{dy} \quad (14)$$

اگر اکنون فرض شود که نوسانات توربولانت V'_y تقریباً برابر نوسانات افقی V'_x باشد، در این صورت معادله ۱۴ می‌شود.

$$\bar{\tau}_{yx}^{(t)} \approx \rho \ell^2 \frac{d\bar{V}_x}{dy} \left| \frac{d\bar{V}_x}{dy} \right| \quad (15)$$

یا در رابطه $\tau = (\mu + \eta) \frac{du}{dy}$ مقدار η می‌شود $\left(\rho \ell^2 \left(\frac{du}{dy} \right)^2 \right)$

در این رابطه مقدار قدر مطلق بدین جهت قرار داده شده تا علامت تنش برشی بدرستی منعکس کننده علامت گرادیان باشد.

توجه :

η مانند لزوجت خاصیتی از سیال نیست بلکه بستگی به چگالی ، گرادیان سرعت و طول اختلاط ℓ دارد. در جریان متلاطم تبادل و حرکت درهم ذرات سیال بجز در مرزها و یا در نزدیکی آنها که این تبدیل به صفر می‌رسد، در بقیه نقاط وجود دارد. لذا ℓ باید در مرز سیال به سمت صفر میل نماید. رابطه خاصی میان ℓ و فاصله جداره y ، با روابط پیرانتل بدست نمی‌آید. وون کارمن (Von Karman) پس از توجه و بررسی ارتباط‌های تشابهی میان سیالات متلاطم پیشنهاد کرد که

$$\ell = k \frac{du/dy}{d^2u/dy^2}$$

که در این رابطه k ثابت عمومی در جریان متلاطم است که بدون توجه به نوع آرایش مرزها و یا مقدار عدد رینالدز تعیین می‌گردد.

در جریانهای متلاطم η را گاهی لزوجت ادی می‌نامند که عموماً بسیار بزرگتر از μ است این پارامتر را باید به عنوان ضریب انتقال اندازه حرکت در نظر گرفت که بیانگر انتقال اندازه حرکت از نقاطی که تراکم اندازه حرکت در آنها بالاست به نقاطی که تراکم اندازه حرکت کمتر دارند، می‌باشد. معمولاً از لزوجت سینماتیک ادی $\varepsilon = \eta/\rho$ استفاده بعمل می‌آید که تنها خاصیتی از سیال بوده و همانند لزوجت سینماتیک می‌باشد.

شکل سوم معادله که برای تنش‌های رینالدز وجود دارد از نتایج آزمایشهای تجربی نتیجه شده است. این معادله تجربی برای مناطق نزدیک جداره‌های سخت مفید است.

$$\bar{\tau}_{yx}^{(t)} = -\rho n^2 \bar{V}_x y \left(1 - \exp \left\{ -\frac{n^2 \bar{V}_x y}{\nu} \right\} \right) \frac{d\bar{V}_x}{dy} \quad (16)$$

پارامتر n یک عدد ثابت است که برای جریان توربولانت در لوله‌ها 0.124 تعیین شده است. معادله طول اختلاط می‌تواند برای استخراج معادله‌ای جهت توزیع سرعت جریان توربولانت مورد استفاده قرار گیرد. شعاع لوله R می‌باشد و لذا می‌توانیم متغیر y را به شکل زیر بنویسیم

$$y = R - r$$

بنابراین متغیر مستقل y ، برخلاف r که از مرکز لوله سنجیده می‌شود، از دیواره اندازه‌گیری می‌گردد. برای جریان در لوله‌ها با استفاده از معادلات هموار سازی زمانی رابطه‌ای نظیر جریان لامینار می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد. تنها سرعتی که مورد رسیدگی قرار می‌گیرد سرعت متوسط محوری جریان \bar{V}_z

می باشد. همچنین این سرعت تنها تابعی است از محور شعاعی r . معادله حرکت در مختصات استوانه‌ای بر اساس روابط تنش‌های برشی می‌شود.

$$0 = -\frac{dp}{dz} - \frac{1}{r} \frac{d(r\bar{\tau}_{rz})}{dr}$$

که در آن $\bar{\tau}_{rz} = \bar{\tau}_{rz}^{(\ell)} + \bar{\tau}_{rz}^{(t)}$ با انتگرال‌گیری از معادله فوق خواهیم داشت.

$$\frac{d(r\bar{\tau}_{rz})}{dr} = -r \frac{dp}{dz}$$

$$r\bar{\tau}_{rz} = -\frac{r^2}{2} \frac{dp}{dz} + C_1$$

در مرکز لوله سرعت باید حداکثر باشد. بنابراین شرط مرزی می‌شود.

$$r=0 \quad \bar{\tau}_{rz} = 0$$

با این شرط $C_1 = 0$. حال معادله خواهد شد.

$$\bar{\tau}_{rz} = -\frac{r}{2} \frac{dp}{dz} = -\frac{r}{R} \frac{R}{2} \frac{dp}{dz} \quad (17)$$

معادله زیر تنش برشی جداره را برای جریان در یک لوله را نشان می‌دهد.

$$\tau_w = -\frac{R}{2} \frac{dp}{dz}$$

با ترکیب آن با معادله ۱۷ خواهیم داشت:

$$\bar{\tau}_{rz} = \frac{r}{R} \tau_w$$

با تعریف $y = R - r$ این معادله می‌شود

$$\bar{\tau}_{rz} = \tau_w \left(1 - \frac{y}{R}\right)$$

بنابراین

$$\bar{\tau}_{rz}^{(\ell)} + \bar{\tau}_{rz}^{(t)} = \tau_w \left(1 - \frac{y}{R}\right) \quad (18)$$

برای ساده کردن دو فرض می‌توان در نظر گرفت. اول آنکه در محیط آشفتگی (توربولانت) حرکت مولکولی در مقایسه با حرکات ناشی از ادی (eddying) قابل صرف‌نظر می‌باشند. در اینصورت

$$\bar{\tau}_{rz}^{(\ell)} \ll \bar{\tau}_{rz}^{(t)}$$

فرض دوم این است که

$$\tau_w \left(1 - \frac{y}{R}\right) \approx \tau_w$$

این فرض از این جهت در نظر گرفته می شود که از نظر محاسبات ریاضی کار را ساده می نماید. معادله ۱۸ حال به شکل زیر کاهش می یابد.

$$\bar{\tau}_{rz}^{(t)} = \tau_w$$

در این قسمت نیاز است تا معادله ۱۵ در مختصات استوانه ای نوشته شده تا $\bar{\tau}_{rz}$ را به مقدار تغییر شکل زاویه ای (Strain rate) مرتبط نماید. برای جریان در لوله،

$$\bar{\tau}_{rz}^{(t)} = \rho \ell^2 \left(\frac{dV_z}{dr} \right)^2 \quad (19)$$

حال باید رابطه ی بین طول اختلاط و متغیرهای مستقل داشته باشیم. اگر فرض شود که طول اختلاط نسبتی از (y) است معادله مناسبی نتیجه خواهد شد.

$$\ell = ky$$

که در آن k نسبتی ثابت می باشد (همان مقدار ثابت وون کارمن است که مقدار آن حدود ۰/۳۶ تا ۰/۴ است). بر حسب مقدار (y) معادله ۱۹ خواهد شد

$$\bar{\tau}_{rz}^{(t)} = \rho k^2 y^2 \left(\frac{dV_z}{dy} \right)^2 = \tau_w$$

با جابجایی جهت استخراج گرادیان سرعت، خواهیم داشت

$$\frac{d\bar{V}_z}{dy} = \pm \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \frac{1}{ky}$$

که در آن علامت منفی قابل پذیرش نیست. اجزاء زیر رادیکال از نظر ابعادی دیمانسیون سرعت را دارا می باشد و برای راحتی می توان آن را بصورت V^* نشان داد. حال معادله دیفرانسیلی می شود.

$$\frac{d\bar{V}_z}{dy} = \frac{V^*}{ky}$$

با انتگرال گیری از رابطه فوق خواهیم داشت

$$\bar{V}_z = \frac{V^*}{k} \ln(y) + C_1 \quad (20)$$

در لبة لایة انتقالی (بینابین) در y_b ، سرعت برابر است با \bar{V}_{zb} . با بکارگیری این شرایط مرزی بدست می آوریم.

$$\bar{V}_{zb} = \frac{V^*}{k} \ln(y_b) + C_1$$

$$C_1 = \bar{V}_{zb} - \frac{V^*}{k} \ln(y_b)$$

با جایگزینی در معادله ۲۰ خواهیم داشت.

$$\bar{V}_z = \frac{V^*}{k} \ln(y) + \bar{V}_{zb} - \frac{V^*}{k} \ln(y)$$

یا

$$\frac{\bar{V}_z}{V^*} = \frac{1}{k} \ln\left(\frac{y}{y_b}\right) + \frac{\bar{V}_{zb}}{V^*}$$

حال تعاریف $s = \rho V^* y / \mu$ و $s_b = \rho V^* y_b / \mu$ ، که هر دو عدد رینالدز بدون بعد هستند را در نظر می گیریم. حال توزیع سرعت می شود.

$$\frac{\bar{V}_z}{V^*} = \frac{1}{k} \ln\left(\frac{s}{s_b}\right) + \frac{\bar{V}_{zb}}{V^*}$$

تجارب نشان داده که بهترین مقدار برای k مقدار 0.36 است. علاوه بر این لبة بیرونی ناحیه انتقالی می تواند در $s_b = 26$ انتخاب گردد. به همین شکل $\bar{V}_{zb}/V^* = 12/85$. بعد از جایگزینی و ساده سازی خواهیم داشت:

$$\frac{\bar{V}_z}{V^*} = \frac{1}{0.36} \ln(s) + 3.8 \quad s \geq 26 \quad (21)$$

این معادله به نام توزیع لگاریتمی معروفی است. مشخص شده است که برای اعداد رینالدز بزرگتر از ۲۰۰۰۰، معادله ۲۱ در منطقه توربولانت توزیع خوبی را نشان می‌دهد. نزدیک جداره، معادله ۱۶ می‌تواند با موفقیت مورد استفاده قرار گیرد. در این قسمت معادله توزیع سرعت استخراج نگردید. زیرا استخراج آن مستلزم پروسه انتگرال‌گیری است که از اهداف این بخش خارج است. هرچند مقایسه بین مقادیر محاسبه شده و اندازه‌گیری شده بیانگر توافق خوبی است.

فصل چهارم

جریان سیال بدون لزجت و غیر قابل تراکم

(جریان سیال ایده آل)

همه سیالات حقیقی دارای لزجت هستند. چون خیلی از حالات حرکت جریان وجود دارند که می توان در آنها از اثرات لزجت صرف نظر نمود، (این مسئله مشابه صرف نظر کردن از نیروهای اصطکاک در تحلیل سیستم های دینامیک در بعضی از حالات می باشد.) لذا مفید است تا در مورد دینامیک سیال ایده آل که لزجت ندارد و غیر قابل تراکم است، تحقیق نمود. تحلیل حرکت سیال ایده آل، بدلیل عدم وجود تنش برشی، ساده تر از بررسی جریانات لزج می باشد. در بررسی این جریانها، تنش های عمودی تنها تنش هایی هستند که باید مورد رسیدگی قرار گیرند. برای سیال بدون لزجت در حال حرکت، تنش عمودی (نرمال) در هر نقطه، در تمام جهات برابر است (کمیت برداری). تنش عمودی (نرمال) در یک جریان بدون لزجت برابر منفی فشار ترمودینامیکی است، $\sigma_{xx} = -p$ (این نتیجه با نتیجه معادله

$$\sigma_{xx} = -p - \frac{2}{3} \mu \nabla \cdot \vec{V} + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}$$

برای $\mu = 0$ سازگاری دارد.)

معادله مومنتم برای جریان بدون اصطکاک : معادلات اولر

معادلات حرکت برای جریان بدون اصطکاک، (معادلات اولر نامیده می شوند) می توانند از معادلات کلی حرکت، (معادلات دیفرانسیلی مومنتم که در فصل قبل بدست آمد) بدست آیند. از آنجایی که هیچ تنش برشی نمی تواند در جریان بدون اصطکاک وجود داشته باشد و تنش های عمودی (نرمال)، عبارت است از منفی فشار ترمودینامیکی، معادله های حرکت جریان بدون اصطکاک می شوند:

$$\rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} = \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right)$$

$$\rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} = \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right)$$

$$\rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} = \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right)$$

معادله های فوق همچنین می توانند، با یک معادله برداری بشکل زیر نوشته شوند:

$$\rho \vec{g} - \nabla p = \rho \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + u \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} \right)$$

یا

$$\rho \vec{g} - \nabla p = \rho \frac{D\vec{V}}{Dt}$$

اگر محور Z ، بصورت عمودی بسمت بالا در نظر گرفته شود، در نتیجه از آنجایی که $\nabla Z = \hat{k}$ ،

$$\rho \vec{g} = -\rho g \hat{k} = -\rho g \nabla z$$

و معادله اولر می تواند بشکل زیر نوشته شود:

$$-g \nabla Z - \frac{1}{\rho} \nabla p = \frac{D\vec{V}}{Dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V}$$

در مختصات استوانه ای ، معادلات در شکل مولفه ای با در نظر گرفتن نیروی ثقل بعنوان تنها نیروی داخلی (Body) خواهد شد.

$$g_r - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = a_r = \frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + V_z \frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{V_\theta^2}{r}$$

$$g_\theta - \frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} = a_\theta = \frac{\partial V_\theta}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_\theta}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + V_z \frac{\partial V_\theta}{\partial z} + \frac{V_r V_\theta}{r}$$

$$g_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = a_z = \frac{\partial V_z}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_z}{\partial \theta} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

اگر محور Z بصورت عمودی بسمت بالا باشد، در نتیجه :

$$g_z = -g \quad , \quad g_r = g_\theta = 0$$

معادلات اولر در مختصات خط جریان

در فصلهای قبل دریافتیم که خطوط جریان (مماس بر بردار سرعت در هر نقطه از میدان جریان رسم می شوند)، یک روش مناسب نمایش گرافیکی را ارائه می نمایند. در جریان ماندگار، یک ذره سیال در طول یک خط جریان حرکت خواهد کرد زیرا برای جریان ماندگار، مسیرهای حرکت و خطوط جریان برهم منطبق هستند. بنابراین، در توضیح حرکت یک ذره سیال در یک جریان ماندگار، مسافت در طول یک خط جریان یک مختصات ریاضی است. مختصات خطوط جریان همچنین ممکن است برای بیان جریان غیرماندگار، نیز بکار گرفته شود. خطوط جریان در جریان غیرماندگار، یک بیان گرافیکی از میدان سرعتی لحظه ای ارائه می دهند. برای سادگی مطابق شکل، جریانی در صفحه yz در نظر بگیرید. معادلات حرکت باید برحسب مختصات s (فاصله در طول یک خط جریان) و مختصات n (فاصله از خط جریان) نوشته شوند.

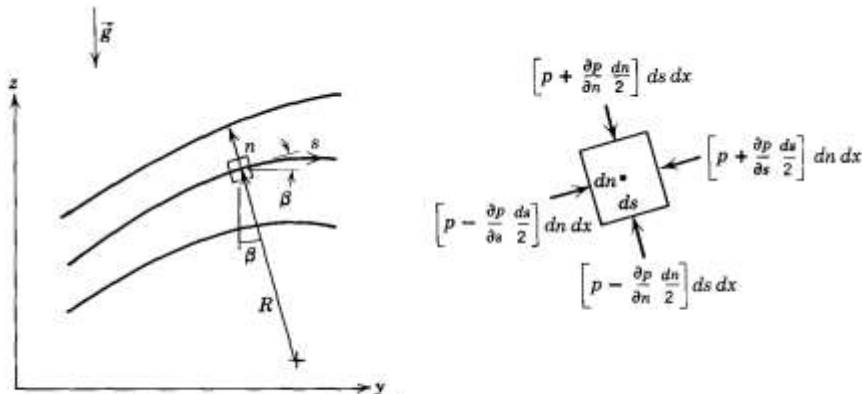


Fig. 6.1 Fluid particle moving along a streamline.

از آنجایی که بردار سرعت باید مماس برخط جریان باشد، معادله میدان سرعت به وسیله $\vec{V} = \vec{V}(s, t)$ داده می شود. فشار در مرکز المان سیال برابر p میباشد. اگر قانون دوم نیوتن را در خط جریان (s) برای یک المان از سیال با حجم $dsdn dx$ بکار بریم و از نیروهای لزجی صرفنظر نمائیم، رابطه زیر را بدست می آوریم.

$$\left(p - \frac{\partial p}{\partial n} \frac{ds}{2} \right) dn dx - \left(p + \frac{\partial p}{\partial s} \frac{ds}{2} \right) dn dx - \rho g \sin \beta dsdn dx = \rho a_s dsdn dx$$

که در آن β زاویه بین خط مماس بر خط جریان و افق می باشد و a_s شتاب ذره سیال در طول خط جریان است. با ساده کردن رابطه خواهیم داشت:

$$-\frac{\partial p}{\partial s} - \rho g \sin \beta = \rho a_s$$

از آنجائیکه $\sin \beta = \frac{\partial z}{\partial s}$ می توانیم بنویسیم:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} - g \frac{\partial z}{\partial s} = a_s$$

در طول هر خط جریان $V_s = V_s(s, t)$ و کل شتاب یک ذره سیال در مسیر خط جریان بوسیله رابطه زیر داده می شود

$$a_s = \frac{DV_s}{Dt} = \frac{\partial V_s}{\partial t} + V_s \frac{\partial V_s}{\partial s}$$

سرعت، مماس برخط است؛ بهمین دلیل پانویس، s ، در V_s زیادی است و می تواند حذف شود.

معادله اولر در مسیر یک خط جریان در حالتی که محور Z بصورت عمودی بسمت بالا باشد خواهد شد:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} - g \frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial s}$$

برای جریان ماندگار و با صرفنظر کردن از نیروهای جسمی، معادله اولر در مسیر یک خط جریان بشکل زیر کاهش می یابد.

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} = -V \frac{\partial V}{\partial s}$$

که نشان دهنده اینست که کاهش در سرعت همراه خواهد بود با افزایش در فشار و بالعکس.

برای بدست آوردن معادله اولر در یک مسیر عمود برخطوط جریان، می توانیم قانون دوم نیوتن در جهت n نسبت به المان سیال را بکار ببریم. بار دیگر با صرفنظر کردن از نیروهای لزجی رابطه زیر بدست خواهد آمد.

$$\left(p - \frac{\partial p}{\partial n} \frac{dn}{2} \right) ds dx - \left(P + \frac{\partial p}{\partial n} \frac{dn}{2} \right) ds dx - \rho g \cos \beta dn dx ds = \rho a_n dn dx ds$$

که در آن β زاویه بین جهت n و خط عمودی می باشد و a_n شتاب ذره سیال در جهت n می باشد. با ساده کردن معادله بدست خواهیم آورد:

$$-\frac{\partial p}{\partial n} - \rho g \cos \beta = \rho a_n$$

از آنجایی که $\cos \beta = \frac{\partial z}{\partial n}$ می توانیم بنویسیم:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} - g \frac{\partial z}{\partial n} = a_n$$

شتاب المان سیال بطرف مرکز انحناء خط جریان، یعنی در جهت منفی n میباشد؛ بنابراین در سیستم مختصات نشان داده شده در شکل، شتاب مایل به مرکز به صورت:

$$a_n = -\frac{V^2}{R}$$

برای جریان ماندگار، [اگر جریان ماندگار نباشد الگوی خط جریان با زمان تغییر می کند. که در این حالت $a_n = -\frac{V_s^2}{R} + \frac{\partial V_N}{\partial t}$ که در آن R شعاع انحناء خط جریان می باشد،] معادله اولر برای خط جریان بصورت زیر نوشته می شود.

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} + g \frac{\partial z}{\partial n} = \frac{V^2}{R}$$

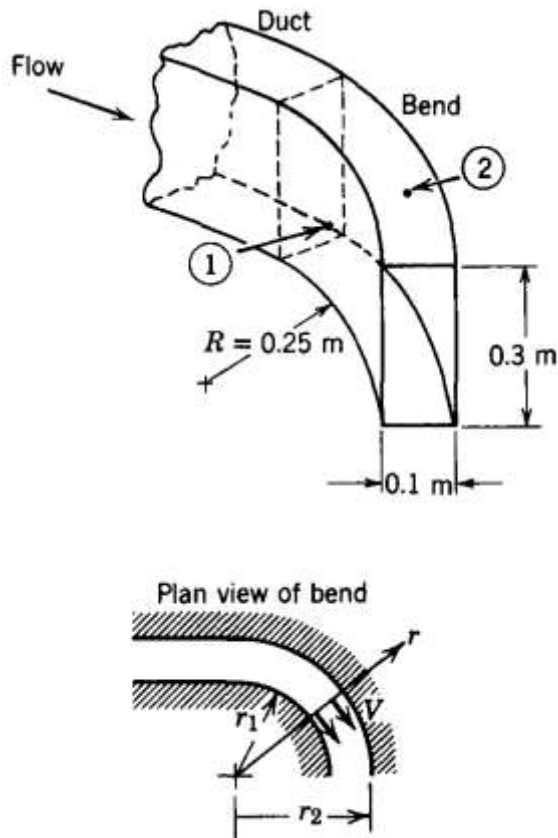
برای جریان ماندگار در یک صفحه افقی، معادله اولر برای یک خط جریان خواهد شد.

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} = \frac{V^2}{R}$$

این معادله نشان دهنده این است که فشار با فاصله گرفتن از مرکز انحناء خط جریان، افزایش می یابد. در مناطقی که خطوط جریان مستقیم هستند، شعاع انحناء، R ، بینهایت می شود و در نتیجه تغییرات فشار در جهت عمود بر خطوط جریان نخواهیم داشت.

مثال : جریان در یک خم

می خواهیم مقدار جریان هوا در شرایط استاندارد در یک مجرای بسته در سطح افق را بوسیله نصب شیرهای فشار در طول یک خم تعیین نمائیم. مجرای بسته، 0.3m عمق و 0.1m پهنا دارد. شعاع داخلی خم، 0.25m است. اگر مقدار اختلاف فشار اندازه گیری شده بین شیرهای نصب شده، 40mm آب باشد، مقدار تقریبی جریان را حساب کنید، فرض کنید سرعت درون خم یکنواخت می باشد.



مثال

داده ها: جریان درون یک خم از مجرای بسته همانطور که نشان داده شده

$$p_2 - p_1 = \rho_{H_2O} g \Delta h$$

وقتی که $\Delta h = 40mm$ باشد، جریان یکنواخت، هوا در شرایط STP (استاندارد)

خواسته: Q

راه حل:

بابکارگیری معادله اولر برای مولفه r در طول خط جریان،

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\rho v^2}{r} \quad \text{معادله اساسی}$$

فرضیات (۱) جریان بدون اصطکاک

(۲) جریان غیرقابل تراکم

(۳) جریان یکنواخت در مقطع اندازه گیری

برای این جریان $p=p(r)$ ، بنابراین :

$$dp = \rho V^2 \frac{dr}{r} \quad \text{یا} \quad \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{dp}{dr} = \frac{\rho V^2}{r}$$

با انتگرال گیری داریم :

$$p_2 - p_1 = \rho V^2 \ln r \Big|_{r_1}^{r_2} = \rho V^2 \ln \frac{r_2}{r_1}$$

پس

$$V = \left[\frac{p_2 - p_1}{\rho \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} \right]^{\frac{1}{2}}$$

اما $\Delta p = p_2 - p_1 = \rho_{H_2O} g \Delta h$ بنابراین

$$V = \left[\frac{\rho_{H_2O} g \Delta h}{\rho \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left[999 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \times 0.04 \times \frac{\text{m}^3}{1.23 \text{kg}} \times \frac{1}{\ln\left(\frac{0.35 \text{m}}{0.25 \text{m}}\right)} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$V = 30.8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

برای جریان ماندگار :

$$Q = VA = 30.8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \times 0.1 \text{m} \times 0.3 \text{m} = 0.924 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

در کاربردهای واقعی، پروفیل سرعت در یک خم کانال یکنواخت نیست. پروفیل سرعت در یک خم، (در صورت عدم تاثیر جریانهای ثانویه) تمایل به پروفیل ورتکس آزاد (غیرچرخشی) دارد که در آن سرعت نسبت به شعاع تغییرات معکوس دارد.

در واقع در یک کانال با خم 360° درجه با ورود جریان به داخل قوس و به خاطر گرادیان طولی فشار ناشی از نیروی جانب مرکز (در بازه کوتاهی از ورودی قوس، به خاطر تغییر ناگهانی انحناء، در امتداد جداره داخلی کاهش فشار و در امتداد جداره خارجی افزایش فشار اتفاق می افتد)، حداکثر سرعت به طرف دیواره داخلی منتقل می شود. در قسمت کوتاهی از اول قوس، گرادیان فشار طولی منفی در نزدیکی دیواره داخلی رخ داده و باعث شتاب گرفتن ذرات آب می شود و در مقابل، در نزدیکی قوس بیرونی با گرادیان فشار طولی مثبت همراه بوده و سرعت سیال در این میدان کم می شود. روند مزبور تا مقطعی بین $20^\circ = \theta$ و $30^\circ = \theta$ (نزدیکی مقطع عرضی $25^\circ = \theta$) ادامه داشته و بعد از این مقطع، حداکثر سرعت به نزدیکی دیواره بیرونی منتقل می شود. علت این پدیده، تولید جریان های ثانویه در داخل مقاطع عرضی می باشد به طوری که این جریان ها که در نزدیک سطح آب به طرف دیواره بیرونی و در نزدیکی بستر به طرف دیواره داخلی برقرار هستند، بر گرادیان طولی فشار غالب شده باعث انتقال عرضی مومنت طولی جریان و یا به عبارتی باعث بازتوزیع آن می شوند. پدیده انتقال حداکثر سرعت به طرف دیواره بیرونی به تدریج در طول نیمه اول تشدید شده و در مقطع عرضی $70^\circ = \theta$ تا حد زیادی به دیواره بیرونی نزدیک می شود. از مقطع مزبور به بعد، محل وقوع حداکثر سرعت تقریباً بدون تغییر باقی می ماند. با توجه به پروفیل های رسعت در مقاطع عرضی واقع در نیمه دوم قوس، جریان در این ناحیه به حالت کاملاً توسعه یافته رسیده و تغییر چندانی در مقادیر سرعت بین دو مقطع عرضی متوالی وجود ندارد. در مقاطع انتهایی قوس سرعت در نزدیکی دیواره بیرونی افزایش یافته و پروفیل سرعت، حالت تیزتری به خود می گیرد. علت این پدیده، مشابه ورودی قوس، تأثیر گرادیان طولی فشار می باشد که در این قسمت از میدان، در امتداد دیواره بیرونی گرادیان طولی منفی و در امتداد دیواره داخلی گرادیان طولی مثبت حاکم می باشد. در نتیجه، دو عامل جریان ثانویه و گرادیان طولی فشار در این حالت به عنوان عوامل همسو عمل کرده و باعث افزایش بیشتر سرعت در ناحیه نزدیک دیواره بیرونی می شوند.

معادله برنولی - انتگرال گیری از معادله اولر در طول یک خط جریان برای یک جریان ماندگار

در قسمتهای قبلی، معادلات مومنتم و معادله پیوستگی در شکل دیفرانسیلی نوشته شده اند. از نظر تئوری برای یک جریان بدون لزجت غیر قابل تراکم، این معادلات می توانند برای بدست آوردن کامل نواحی فشار و سرعت حل شوند. (اگر جرم مخصوص ثابت نباشد، یک رابطه اضافی ترمودینامیک برای جرم مخصوص مورد نیاز می باشد.) هرچند در تئوری، معادلات می توانند حل شوند، اما راه حل برای یک میدان جریان بخصوص ممکن است خیلی پیچیده باشد. با این وجود ما می توانیم از معادله اولر برای یک جریان ماندگار و در طول یک خط جریان بسادگی انتگرال گیری بنمائیم. از تجزیه و تحلیل حجم کنترل دیفرانسیلی در درس مکانیک سیالات، یک معادله دیفرانسیلی بدست آمد که بعد از انتگرال گیری، شکلی از معادله برنولی بدست آمد. برای اضافه کردن بینش فیزیکی در مورد محدودیتهای نتایج حاصل از این رابطه، دو شکل دیگر از استخراج معادله برنولی ارائه می شود.

استخراج معادله با استفاده از مختصات خط جریان

معادله اولر برای جریان ماندگار در طول یک خط جریان بوسیله رابطه زیر ارائه می شود.

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} - g \frac{\partial z}{\partial s} = V \frac{\partial V}{\partial s}$$

اگر یک ذره سیال به اندازه ds ، در طول یک خط جریان جابجا شود، در نتیجه خواهیم داشت:

$$\frac{\partial p}{\partial s} ds = dp \quad (\text{مقدار تغییر در فشار در فاصله } s)$$

$$\frac{\partial z}{\partial s} ds = dz \quad (\text{مقدار تغییر در ارتفاع در فاصله } s)$$

$$\frac{\partial V}{\partial s} ds = dV \quad (\text{مقدار تغییر در سرعت در فاصله } s)$$

بنابراین، بعد از ضرب کردن معادله قبلی در ds ، می توانیم بنویسیم:

$$-\frac{dp}{\rho} - g dz = V dV \quad (\text{در فاصله } s)$$

یا

(در فاصله s)

$$\frac{dp}{\rho} + VdV + gdz = 0$$

با انتگرال گیری از این معادله خواهیم داشت :

$$\int \frac{dp}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz = \text{ثابت} \quad (\text{در فاصله } s)$$

قبل از بکارگیری معادله فوق باید رابطه ای بین فشار ، p ، و جرم مخصوص ρ پیدا کنیم.
برای حالت ویژه جریان غیر قابل تراکم ، ثابت $\rho =$ ، معادله فوق معادله برنولی تبدیل خواهد شد.

$$\frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz = \text{ثابت}$$

محدودیت ها :

(۱) جریان ماندگار

(۲) جریان غیرقابل تراکم

(۳) جریان بدون اصطکاک

(۴) جریان در طول یک خط جریان

معادله برنولی، معادله ای بسیار مفید و توانا می باشد، زیرا مقدار تغییر فشار را به تغییرات سرعت و ارتفاع در طول یک جریان ارتباط می دهد. اما این معادله در صورتی جوابهای صحیح خواهد داد که محدودیتهای فوق الذکر تا حد قابل قبولی در نظر گرفته شوند.

(بطور کلی، مقدار ثابت در معادله فوق در طول خطوط جریان متفاوت، مقادیر متفاوتی خواهد داشت.)

استخراج معادله با استفاده از مختصات مستطیلی

شکل برداری معادله اولر، می تواند در طول یک خط جریان انتگرال گرفته شود

$$\left(-g\nabla z - \frac{1}{\rho}\nabla p = \frac{D\vec{V}}{Dt} = \frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + (\vec{V}\cdot\nabla)\vec{V} \right) \text{ (معادله)}$$

با داشتن میدان سرعت، \vec{V} ، که با مشخصات مختصات مستطیلی X, Y, Z مشخص می شود، مناسب است که نمادهای برداری استفاده شود. می توانیم استخراج معادله را محدود به جریان ماندگار نمائیم. بنابراین نتیجه نهایی باید معادله برنولی بشود.

برای جریان ماندگار، معادله اولر در مختصات مستطیلی می تواند بشکل زیر بیان شود.

$$-\frac{1}{\rho}\nabla p - g\nabla z = \frac{D\vec{V}}{Dt} = u\frac{\partial\vec{V}}{\partial x} + v\frac{\partial\vec{V}}{\partial y} + w\frac{\partial\vec{V}}{\partial z} = (\vec{V}\cdot\nabla)\vec{V}$$

برای جریان ماندگار، میدان سرعت بوسیله رابطه $\vec{V} = \vec{V}(x, y, z)$ بیان می شود. خطوط جریان خطوطی هستند که در میدان جریان، مماس بر بردار سرعت در هر نقطه رسم می شوند. بخاطر داریم که در جریان ماندگار، خطوط جریان، خطوط مسیر و خطوط لایه ها برهم منطبق هستند. حرکت یک ذره در طول یک خط جریان با معادله فوق بیان می شود. در فاصله زمانی dt ، ذره به اندازه برداری $d\vec{s}$ در طول خط جریان تغییر مکان دارد.

اگر حاصلضرب نقطه ای اجزاء معادله فوق را با فاصله $d\vec{s}$ ، در طول خط جریان، انجام دهیم یک معادله اسکالر که فشار P_r ، سرعت V_r و ارتفاع Z در طول خط جریان را به هم مرتبط می کند، بدست خواهد آمد با انجام ضرب نقطه ای $d\vec{s}$ با معادله فوق خواهیم داشت.

$$\frac{1}{\rho}\nabla p \cdot d\vec{s} - g\nabla z \cdot d\vec{s} = (\vec{V}\cdot\nabla)\vec{V} \cdot d\vec{s} \quad *$$

که در آن:

$$d\vec{s} = dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k} \quad (\text{در طول } s)$$

حال هر جزء از سه جزء معادله فوق را مورد ارزیابی قرار می دهیم:

$$-\frac{1}{\rho}\nabla p \cdot d\vec{s} = -\frac{1}{\rho}\left[\hat{i}\frac{\partial p}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial p}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial p}{\partial z}\right] \cdot [dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}] = -\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy + \frac{\partial p}{\partial z}dz\right]$$

(در طول s)

$$-\frac{1}{\rho} \nabla p \cdot d\vec{s} = -\frac{1}{\rho} dp \quad (\text{در طول } s)$$

$$-g \nabla z \cdot d\vec{s} = -g \hat{k} \cdot [dx \hat{i} + dy \hat{j} + dz \hat{k}]$$

$$-g \nabla z \cdot d\vec{s} = -g dz \quad (\text{در طول } s)$$

با بکارگیری رابطه برداری $(\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = \frac{1}{2} \nabla(\vec{V} \cdot \vec{V}) - \vec{V} \times (\nabla \times \vec{V})$ می توانیم جزء سوم را بصورت زیر بنویسیم:

(در طول s)

$$(\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} \cdot d\vec{s} = \left[\frac{1}{2} \nabla(\vec{V} \cdot \vec{V}) - \vec{V} \times (\nabla \times \vec{V}) \right] \cdot d\vec{s} = \left\{ \frac{1}{2} \nabla(\vec{V} \cdot \vec{V}) \right\} \cdot d\vec{s} - \left\{ \vec{V} \times (\nabla \times \vec{V}) \right\} \cdot d\vec{s}$$

قسمت آخر در سمت راست این معادله برابر صفر است. زیرا \vec{V} موازی $d\vec{s}$ می باشد.

در نتیجه :

$$\begin{aligned} (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} \cdot d\vec{s} &= \frac{1}{2} \nabla(\vec{V} \cdot \vec{V}) \cdot d\vec{s} = \frac{1}{2} \nabla(V^2) \cdot d\vec{s} = \frac{1}{2} \left[\hat{i} \frac{\partial V^2}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial V^2}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial V^2}{\partial z} \right] \cdot d\vec{s} \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial V^2}{\partial x} dx + \frac{\partial V^2}{\partial y} dy + \frac{\partial V^2}{\partial z} dz \right] \end{aligned}$$

$$(\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{2} d(V^2) \quad (\text{در طول } s)$$

باجایگزینی این سه جزء در معادله اولی خواهیم داشت.

$$\frac{dp}{\rho} + \frac{1}{2} d(V^2) + g dz = 0 \quad (\text{در طول } s)$$

با انتگرال گیری از این معادله خواهیم داشت:

$$\int \frac{dp}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz = \text{ثابت} \quad (\text{در طول } s)$$

اگر جرم مخصوص (ρ) ثابت باشد (جریان غیر قابل تراکم باشد)، رابطه برنولی بدست می آید.

$$\frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz = \text{ثابت}$$

همانطور که انتظار می رفت مشاهده نمودیم که دو معادله آخر، مشابه معادلات از روش قبلی که با بکارگیری مختصات خط جریان بدست آمده بودند، می باشند. لازم به ذکر است که معادله برنولی که با بکارگیری مختصات مستطیلی استخراج شده نیز دارای محدودیتهای (۱) جریان ماندگار (۲) جریان غیرقابل تراکم (۳) جریان بدون اصطکاک (۴) جریان در طول خط جریان است.

فشارهای Static (ایستایی)، Stagnation (سکون)، Dynamic (دینامیکی)

فشار p ، که برای استخراج معادله برنولی بکار برده شد، فشار ترمودینامیک می باشد، که اصطلاحاً فشار static (ایستایی) نامیده می شود. **فشار ایستایی، فشاری است که توسط وسیله ای که همراه جریان حرکت می کند اندازه گیری می شود.** چون چنین روش اندازه گیری برای بکارگیری عملی نسبتاً مشکل است، پس چگونه می توانیم فشار ایستایی را عملاً اندازه گیری کنیم. در بخش قبلی مشاهده نمودیم که در جهت عمود بر خطوط جریان، تغییرات فشار وجود نداشت. این حقیقت روش اندازه گیری فشار ایستایی را در یک جریان سیال با بکارگیری یک شیر در جداره محل عبور جریان در میدانی که خطوط جریان مستقیم هستند متحمل می نماید، همانطور که در شکل زیر نشان داده شده است.

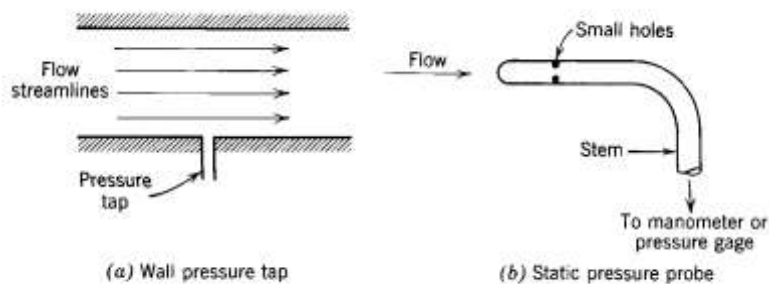


Fig. 6.2 Measurement of static pressure.

فشار سکون stagnation وقتی بدست می آید که سیال در حال حرکت، طی مراحل بدون اصطکاک به سرعت صفر میل کند. در جریان غیرقابل تراکم، معادله برنولی می تواند بکار گرفته شود تا ارتباط بین تغییر در سرعت و فشار را در طول یک خط جریان برای این چنین مراحل بتوان نشان داد. با صرف نظر از تغییرات ارتفاع، معادله برنولی می شود:

$$\frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} = \text{ثابت}$$

اگر در یک نقطه از جریان که سرعت V است فشار p باشد. فشار سکون (stagnation) p_0 (جایی که سرعت سکون، V_0 ، صفر باشد) بوسیله رابطه زیر محاسبه می شود.

$$\frac{p_0}{\rho} + \frac{V_0^2}{2} = \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} = 0$$

یا

$$p_0 = p + \frac{1}{2}\rho V^2$$

معادله فوق تعریف ریاضی فشار سکون برای یک جریان غیر قابل تراکم است. جزء $\frac{1}{2}\rho V^2$ بصورت

عمومی، فشار دینامیکی نامیده می شود. با حل کردن رابطه برای فشار دینامیکی خواهیم داشت:

$$\frac{1}{2}\rho V^2 = p_0 - p$$

و برای سرعت :

$$V = \sqrt{\frac{2(p_0 - p)}{\rho}}$$

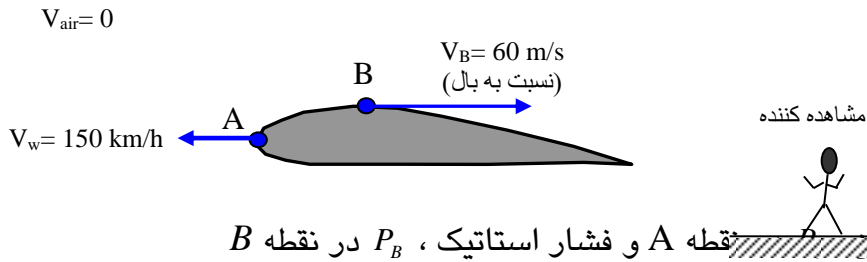
بنابراین اگر در نقطه ای بتوان فشار استاتیکی و سکون را اندازه گیری نمود، می توان با معادله فوق سرعت جریان را محاسبه نمود.

در آزمایشگاه، فشار سکون توسط لوله پیتوت اندازه گیری میشود.

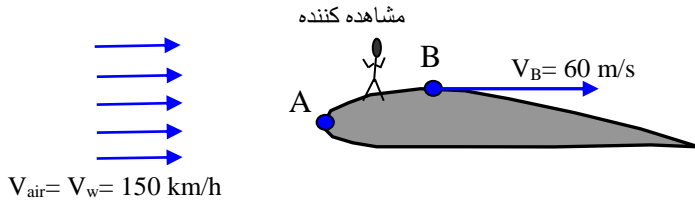
مثال : معادله برنولی با منتقل کردن فرم ارتفاع مرجع

یک هواپیما سبک با سرعت 150km/h در هوای استاندارد و در ارتفاع 1000m پرواز می نماید. فشار سکون (*stagnation*) را روی لبه جلویی بال هواپیما تعیین نمایید. در یک نقطه مشخص نزدیک به بال، سرعت هوا نسبت به بال هواپیما 60m/s است. فشار را در این نقطه محاسبه نمایید.

داده ها : هواپیما در حال پرواز با سرعت 150km/h در هوای استاندارد و در ارتفاع 1000m



خواسته ها: فشار سکوی نقطه A و فشار استاتیک ، P_B در نقطه B
 راه حل : برای مشاهده کننده ای از روی زمین و از روی یک سطح ثابت، جریان حالت غیرماندگار دارد، هر چند از دید مشاهده کننده ای روی بال، جریان حالت ماندگار خواهد داشت.



در $z = 1000$ متر در هوای استاندارد، درجه حرارت $282K$ و سرعت صوت برابر 336 m/s است. از آنجایی که در نقطه B ، $M_B = \frac{V_B}{C} = 0.178$ است و این مقدار کمتر از 0.3 می باشد لذا می توان فرض نمود که جریان بصورت غیرقابل تراکم رفتار می نماید. بنابراین معادله برنولی می تواند در طول یک خط جریان برای مشاهده کننده متحرک روی صفحه مبنای غیراصولی بکار گرفته شود.

$$\frac{P_{\text{هوای}}}{\rho} + \frac{V_{\text{هوای}}^2}{2} + gz_{\text{هوای}} = \frac{P_A}{\rho} + \frac{V_A^2}{2} + gz_A = \frac{P_B}{\rho} + \frac{V_B^2}{2} + gz_B \quad \text{معادله اساسی}$$

مفروضات (۱) جریان ماندگار

(۲) جریان غیرقابل تراکم ($V < 100 \text{ m/s}$)

(۳) جریان بدون اصطکاک

(۴) صرفنظر از Δz

مقادیر فشار و جرم مخصوص می تواند از جدول مربوطه بدست آید. بر طبق جدول در ارتفاع 1000 متر بترتیب $\frac{P}{P_{sL}} = 0.8870$ و $\frac{\rho}{\rho_{sL}} = 0.9075$ می باشند.

$$P = 0.8870 \cdot P_{sL} = 0.8870 \times 1.01 \times 10^5 \frac{N}{m^2} = 8.96 \times 10^4 \frac{N}{m^2}$$

و

$$\rho = 0.9075 \rho_{sL} = 0.9075 \times 1.23 \frac{kg}{m^3} = 1.12 \frac{kg}{m^3}$$

از آنجائیکه سرعت در نقطه سکون برابر $V_A = 0$ است :

$$\begin{aligned} p_{OA} &= p_{هو} + \frac{1}{2} \rho V_{هو}^2 \\ &= 8.96 \times 10^4 \frac{N}{m^2} + \frac{1}{2} \times 1012 \frac{kg}{m^3} \left(150 \frac{km}{h} \times 1000 \frac{m}{km} \times \frac{h}{3600s} \right)^2 \times \frac{N.s^2}{kg.m} \\ p_{OA} &= 90.6 \text{ kPa (مطلق)} \end{aligned} \quad \leftarrow P_{OA}$$

با حل کردن برای فشار استاتیکی در نقطه B بدست می آوریم:

$$p_B = p_{هو} + \frac{\rho}{2} (V_{هو}^2 - V_B^2)$$

$$\begin{aligned} p_B &= 8.96 \times 10^4 \frac{N}{m^2} + \frac{1}{2} \times 1.12 \frac{kg}{m^3} \left[\left(150 \frac{km}{h} \times 1000 \frac{m}{km} \times \frac{h}{3600s} \right)^2 - \frac{(60)^2 n^2}{s^2} \right] \cdot \frac{NS^2}{kg.m} \\ p_B &= 88.5 \text{ kPa (مطلق)} \end{aligned} \quad \leftarrow P_B$$

معادله برنولی در حالت غیرماندگار - انتگرال گیری از معادله اولر در طول یک خط جریان

استخراج معادله برنولی محدود به جریان ماندگار نیست. در این قسمت، معادله برنولی برای جریان غیرماندگار در طول یک خط جریان استخراج و موارد استفاده آن توضیح داده می شود. در بخشهای قبل، معادله مومنتم برای جریان بدون اصطکاک به شکل زیر بدست آمد.

$$-\frac{1}{\rho} \nabla p - g \nabla z = \frac{D\vec{V}}{Dt}$$

این معادله یک معادله برداری است. با انجام ضرب داخلی با $d\vec{s}$ این معادله به یک معادله اسکالر تبدیل می شود. ds یک المان مسافت در طول یک خط جریان میباشد. بنابراین:

$$-\frac{1}{\rho} \nabla p \cdot d\vec{s} - g \nabla z \cdot d\vec{s} = \frac{D\vec{V}}{Dt} \cdot d\vec{s} = \frac{DV_s}{Dt} ds = V_s \frac{\partial V_s}{\partial s} ds + \frac{\partial V_s}{\partial t} ds$$

با توجه به اجزاء معادله فوق در خواهیم یافت که :

$$\nabla p \cdot d\vec{s} = dp \quad (\text{تغییر در فشار در طول } s)$$

$$\nabla z \cdot d\vec{s} = dz \quad (\text{تغییر در } z \text{ در طول } s)$$

$$\frac{\partial V_s}{\partial s} ds = dV_s \quad (\text{تغییر در } V_s \text{ در طول } s)$$

با جایگزینی این مقادیر در معادله فوق بدست می آوریم:

$$-\frac{dp}{\rho} - g dz = V_s dV_s + \frac{\partial V_s}{\partial t} ds$$

با انتگرال گیری از نقطه ۱ تا نقطه ۲ در طول خط جریان خواهیم داشت:

$$\int_1^2 \frac{dp}{\rho} + \frac{V_2^2 - V_1^2}{2} + g(z_2 - z_1) + \int_1^2 \frac{\partial V_s}{\partial t} ds = 0$$

برای یک جریان غیرقابل تراکم جرم مخصوص ثابت است.

برای این حالت مخصوص معادله فوق می شود:

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{V_1^2}{2} + gz_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{V_2^2}{2} + gz_2 + \int_1^2 \frac{\partial V_s}{\partial t} ds$$

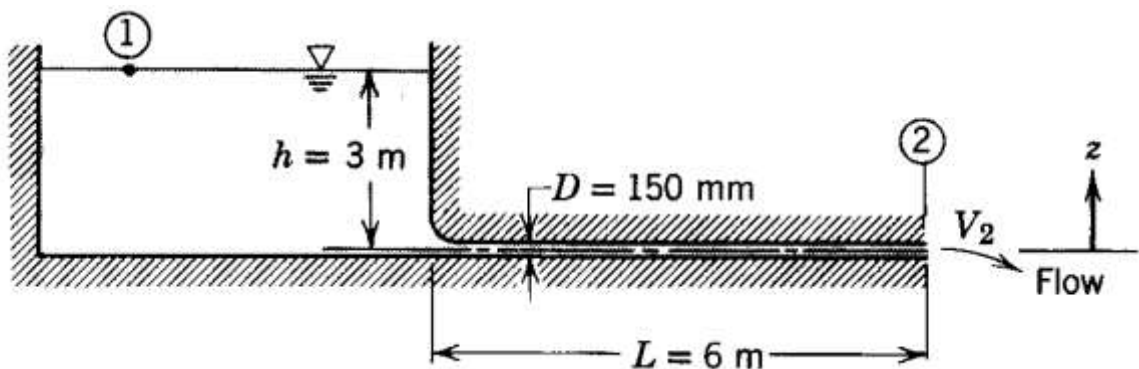
محدودیتها :

- (۱) جریان غیرقابل تراکم
- (۲) جریان بدون اصطکاک
- (۳) جریان در طول یک خط جریان

برای بدست آوردن جزء انتگرالی در معادله فوق، تغییرات در $\frac{\partial V_s}{\partial t}$ باید بصورت تابعی از s شناخته شود. فاصله در طول خط جریان از نقطه ۱ اندازه گیری می شود. (برای جریان ماندگار $\frac{\partial V_s}{\partial t} = 0$ و معادله فوق به معادله برنولی کاهش می یابد) این معادله ممکن است برای هر جریانی که در آن محدودیت‌های رابطه با وضعیت فیزیکی جریان مطابقت داشته باشد، بکار برده شود.

مثال : معادله برنولی غیرماندگار

یک لوله طویل به یک مخزن بزرگ که ابتدا تا ارتفاع 3m پر از آب شده است وصل می باشد. لوله دارای قطر 150mm و طول آن 6m است. بعنوان فرض اول از اصطکاک می توان صرفنظر نمود. بعد از اینکه درب انتهای آزاد لوله برداشته میشود، سرعت جریان خروجی از لوله را بصورت تابعی از زمان تعیین نمائید. مخزن به اندازه کافی بزرگ است که بتوان از تغییرات ارتفاع در آن صرفنظر نمود.



مثال:

داده ها: لوله و مخزن بزرگ همانطور که نشان داده شده است

خواسته: $V_2(t)$

راه حل

معادله برنولی برای جریان غیرماندگار در طول یک خط جریان از نقطه ۱ به نقطه ۲ را بکار می بریم.

معادله اساسی:

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{V_1^2}{2} + gz_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{V_2^2}{2} + gz_2 + \int_1^2 \frac{\partial V_s}{\partial t} ds$$

مفروضات

(۱) جریان غیر قابل تراکم

(۲) جریان بدون اصططاک

(۳) جریان در طول یک خط جریان از ۱ به ۲

$$p_1 = p_2 = P_{atm} \quad (۴)$$

$$V_1^2 \approx 0 \quad (۵)$$

$$z_2 = 0 \quad (۶)$$

$$z_1 = h = \text{ثابت} \quad (۷)$$

(۸) صرفنظر از سرعت در مخزن به جز ناحیه نزدیک ورودی لوله

پس خواهیم داشت:

$$gz_1 = gh = \frac{V_2^2}{2} + \int_1^2 \frac{\partial V_s}{\partial t} ds$$

با ملاحظه فرض ۸ انتگرال خواهد شد:

$$\int_1^2 \frac{\partial V_s}{\partial t} ds \approx \int_0^L \frac{\partial V_s}{\partial t} ds$$

در همه نقاط لوله $V_s = V_2$ ، بنابراین:

$$\int_0^L \frac{\partial V_s}{\partial t} ds = \int_0^L \frac{dV_2}{dt} ds = L \frac{dV_2}{dt}$$

با جایگزینی خواهیم داشت:

$$gh = \frac{V_2^2}{2} + L \frac{dV_2}{dt}$$

با جداسازی متغیرها، بدست می آوریم:

$$\frac{dV_2}{2gh - V_2^2} = \frac{dt}{2L}$$

با انتگرال گیری بین حدود $V=0$ در $t=0$ و $V=V_2$ در $t=t$:

$$\int_0^{V_2} \frac{dv}{2gh - v^2} = \left[\frac{1}{\sqrt{2gh}} \tanh^{-1} \left(\frac{V}{\sqrt{2gh}} \right) \right]_0^{V_2} = \frac{t}{2L}$$

از آنجائیکه $\tanh^{-1}(0)=0$ خواهیم داشت.

$$\frac{1}{\sqrt{2gh}} \tanh^{-1} \left(\frac{V_2}{\sqrt{2gh}} \right) = \frac{t}{2L}$$

یا

$$\frac{V_2}{\sqrt{2gh}} = \tanh \left(\frac{t}{2L} \sqrt{2gh} \right)$$

← $V_2(t)$

برای شرایط داده شده:

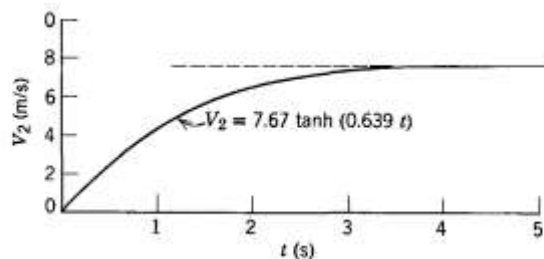
$$\sqrt{2gh} = \sqrt{2 \times 9.81 \frac{m}{s} \times 3m} = 7.67 \frac{m}{s}$$

و

$$\frac{t}{2L} \sqrt{2gh} = \frac{t}{2} \times \frac{1}{6m} \times 7.67 \frac{m}{s} = 0.639 t$$

پس نتیجه خواهد شد:

$$V_2 = 7.67 \tanh(0.639t) \frac{m}{s}$$



جریان غیر چرخشی

یک جریان غیر چرخشی، جریانی است که المان سیال در حال حرکت در میدان جریان تحت هیچ شرایطی چرخش نداشته باشد. یعنی $\vec{\omega} = 0$ ، $\nabla \times \vec{V} = 0$ و از معادله:

$$\vec{\omega} = \hat{i}\omega_x + \hat{j}\omega_y + \hat{k}\omega_z = \frac{1}{2} \left[\hat{i} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \hat{j} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \hat{k} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right]$$

خواهیم داشت:

$$\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

در مختصات استوانه ای برای حالت غیر چرخشی از معادلات قبل خواهیم داشت:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial V_z}{\partial \theta} - \frac{\partial V_\theta}{\partial z} = \frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial r V_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} = 0$$

کاربرد معادله برنولی برای جریان غیر چرخشی

در بخشهای قبل، از معادله اولر در طول یک خط جریان برای جریان ماندگار، غیر قابل تراکم، بدون لزوجت انتگرال گیری نمودیم تا معادله برنولی بدست آید.

$$\frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz = \text{ثابت}$$

معادله فوق، می تواند بین دو نقطه روی یک خط جریان بکار گرفته شود. بطور کلی مقدار ثابت در معادله از یک خط جریان به خط جریان دیگر متغیر خواهد بود.

اگر علاوه بر غیر لزج، ماندگار، و غیر قابل تراکم بودن، میدان جریان همچنین غیر چرخشی نیز باشد (میدان سرعت در این جریان به گونه ای است که $2\vec{\omega} = \nabla \times \vec{V} = 0$ باشد)، می توانیم نشان دهیم که معادله برنولی می تواند بین هر دو نقطه ای از این جریان به کار گرفته شود. همچنین مقدار ثابت در معادله برنولی برای همه خطوط جریان مساوی می باشد. برای اثبات این وضعیت می توانیم با شکل برداری معادله اولر شروع نمائیم.

$$-\frac{1}{\rho} \nabla p - g \nabla z = (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V}$$

با استفاده از روابط برداری می توانیم بنویسیم:

$$(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = \frac{1}{2} \nabla(\vec{v} \cdot \vec{v}) - \vec{v} \times (\nabla \times \vec{v})$$

از آنجایی که برای جریان غیر چرخشی، $\nabla \times \vec{v} = 0$ می توانیم بنویسیم: $(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = \frac{1}{2} \nabla(\vec{v} \cdot \vec{v})$ و معادله اولر برای جریان غیر چرخشی، می تواند به شکل زیر نوشته شود:

$$-\frac{1}{\rho} \nabla p - g \nabla z = \frac{1}{2} \nabla(\vec{v} \cdot \vec{v}) = \frac{1}{2} \nabla(V^2)$$

در فاصله زمانی dt ، یک ذره سیال از موقعیت برداری \vec{r} به موقعیت $\vec{r} + d\vec{r}$ حرکت می نماید؛ مقدار جابجایی $d\vec{r}$ یک جابجایی بی نهایت کوچک اختیاری در هر جهت می باشد. با انجام ضرب داخلی با هر جزء از معادله فوق خواهیم داشت $d\vec{r} = dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}$

$$-\frac{1}{\rho} \nabla p \cdot d\vec{r} - g \nabla z \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2} \nabla(V^2) \cdot d\vec{r}$$

و بنابراین

$$-\frac{dp}{\rho} - g dz = \frac{1}{2} d(V^2)$$

یا

$$\frac{dp}{\rho} + \frac{1}{2} d(V^2) + g dz = 0$$

انتگرال گیری از این معادله می شود

$$\int \frac{dp}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz = \text{ثابت}$$

برای جریان غیر قابل تراکم (ثابت ρ)

$$\frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz = \text{ثابت}$$

از آنجائیکه $d\vec{r}$ یک مقدار جابجایی اختیاری بود. پس برای یک جریان ماندگار، غیر قابل تراکم، غیر لزج که همچنین غیر چرخشی نیز هست، معادله فوق برای هر دو نقطه در میدان جریان معتبر می باشد.

پتانسیل سرعت

درفصل قبلی تابع ψ ، که رابطه ای بین خطوط جریان و بقاء جرم برای جریان دو بعدی غیر قابل تراکم ارائه می داد، تعریف گردید.

علاوه برآن ما می توانیم رابطه ای به نام تابع پتانسیل، ϕ ، برای یک میدان سرعت غیر چرخشی تعریف نمائیم. برای این کار باید معادلات برداری بنیادی مورد استفاده واقع شوند.

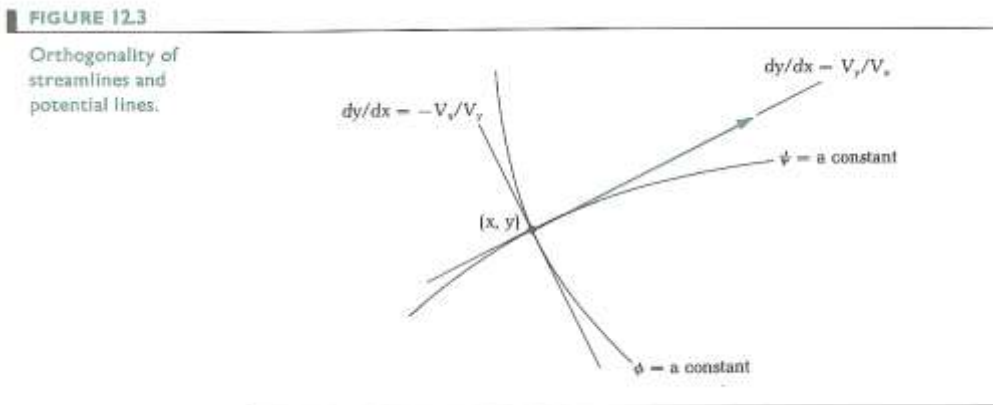
$$\text{curl}(\text{grad}\phi) = \nabla \times \nabla\phi = 0$$

که اگر ϕ یک تابع اسکالر (شامل مختصات فضایی و زمان) و دارای مشتق اول و دوم؛ باشد معتبر است. پس برای یک جریان غیر دورانی که در آن $\nabla \times \vec{V} = 0$ تابع اسکالر ϕ ، باید به گونه ای وجود داشته باشد که گرادیان

ϕ برابر سرعت برداری، \vec{V} ، شود.

برای اینکه جهت مثبت جریان درجهت کاهش ϕ (مشابه جهت مثبت انتقال حرارت که در جهت کاهش درجه حرارت تعریف می گردد) باشد. ϕ را می توانیم بصورت زیر تعریف نمائیم:

$$\vec{V} \equiv -\nabla\phi$$



بنابراین:

$$u = -\frac{\partial\phi}{\partial x} \quad v = -\frac{\partial\phi}{\partial y} \quad w = -\frac{\partial\phi}{\partial z}$$

در مختصات استوانه ای:

$$\nabla = \hat{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \hat{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

در مختصات استوانه ای از معادله $\vec{V} \equiv -\nabla\phi$ نتیجه می گیریم :

$$V_r = -\frac{\partial\phi}{\partial r} \quad V_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial\phi}{\partial\theta} \quad V_z = -\frac{\partial\phi}{\partial z}$$

پتانسیل سرعت، ϕ تنها برای جریان غیر چرخشی تعریف می شود در حالی که تابع جریان، ψ در برگیرنده محدودیت غیر چرخشی بودن جریان نمی باشد.

غیر چرخشی بودن برای مناطقی از جریان معتبر است که بتوان در آنها از نیروهای لزوجتی صرفنظر نمود. (برای مثال این چنین مناطقی در نواحی بیرون از لایه های مرزی یک جریان روی سطوح سخت وجود دارد).

از آنجایی که در یک جریان غیر چرخشی میدان سرعت با تابع پتانسیل، ϕ ، تعریف می شود، لذا بحث تئوری آن اغلب به تئوری جریان پتانسیل بر می گردد. همه سیالات حقیقی دارای لزوجت هستند اما خیلی از حالات هستند که در نظر گرفتن فرض جریان بدون لزوجت بطور قابل ملاحظه ای تحلیل نتایج جریان را ساده و بطور همزمان نتایج معنی داری را ارائه می کند. به دلیل کاربری و جذابیت ریاضی آن، جریان پتانسیل بطور گسترده ای مطالعه شده است.

تابع جریان و پتانسیل سرعت برای جریان دو بعدی غیر چرخشی، غیر قابل تراکم معادله لاپلاس

برای یک جریان دوبعدی، غیر قابل تراکم، غیر چرخشی روابطی برای مولفه های سرعت v, u برحسب تابع جریان، ψ ، و پتانسیل سرعت، ϕ ، به شرح زیر وجود دارد.

$$u = \frac{\partial\psi}{\partial y} \quad v = -\frac{\partial\psi}{\partial x} \quad (1)$$

$$u = -\frac{\partial\phi}{\partial x} \quad v = -\frac{\partial\phi}{\partial y} \quad (2)$$

با جایگزینی برای v, u از معادله (1) در شرایط غیر چرخشی، داریم :

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

بدست می آوریم:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0$$

با جایگزینی v, u از معادله ردیف (2) در معادله پیوستگی، $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$

خواهیم داشت:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$$

معادلات به دست آمده به شکل معادله لاپلاس هستند. هر تابع ϕ, ψ که معادله لاپلاس را ارضاء نماید بیان کننده یک میدان جریان دو بعدی، غیر قابل تراکم، غیر چرخشی است.

در فصل قبل دیدیم که تابع جریان، ψ ، در طول یک خط جریان ثابت است، برای $\psi = \text{ثابت}$

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = 0 \quad \text{و} \quad d\psi = 0$$

شیب یک خط جریان (خطی با ψ ثابت) بوسیله رابطه زیر بیان می شود.

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{\psi} = - \frac{\partial \psi / \partial x}{\partial \psi / \partial y} = - \frac{-v}{u} = \frac{v}{u} \quad (1)$$

در طول یک خط با ϕ ثابت، $d\phi = 0$ است و

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy = 0$$

به طور مشابه شیب یک خط پتانسیل - خط با ϕ ثابت - بوسیله رابطه زیر داده می شود.

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{\phi} = - \frac{\partial \phi / \partial x}{\partial \phi / \partial y} = - \frac{u}{v} \quad (2)$$

با مقایسه معادلات 1 و 2 مشاهده می کنیم که شیب یک خط ψ ثابت در هر نقطه برابر است با منفی عکس شیب خط ϕ ثابت در آن نقطه: یعنی خطوط ψ ثابت و ϕ ثابت برهم عمود هستند.

این خصوصیت خطوط پتانسیل و خطوط جریان برای تحلیل نواحی جریان بسیار مفید می باشد.

مثال - پتانسیل سرعت

یک میدان جریان که بوسیله $\psi = ax^2 - ay^2$ داده شده و در آن $a = 3s^{-1}$ است نشان دهید که جریان غیر چرخشی است. برای این جریان، پتانسیل سرعت را تعیین نمایید:

مثال

داده ها: جریان غیر قابل تراکم با $\psi = ax^2 = ay^2$ که در آن $a = 3s^{-1}$ است.
 خواسته ها: (الف) نشان دهید که جریان غیر چرخشی است.
 (ب) برای این جریان، پتانسیل سرعت را تعیین نمایید.
 راه حل: اگر جریان غیر چرخشی است پس $\omega_z = 0$. لذا:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad \text{و} \quad 2\omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

پس
$$v = -\frac{\partial}{\partial x}(ax^2 - ay^2) = -2ax \quad \text{و} \quad u = \frac{\partial}{\partial y}(ax^2 - ay^2) = -2ay$$

بنابراین
$$2\omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(-2ax) - \frac{\partial}{\partial y}(-2ay) = -2a + 2a = 0$$

← $2\omega_z$

بنابراین جریان غیر چرخشی است

مولفه های سرعت برحسب پتانسیل سرعت می توانند به شکل زیر نوشته شوند:

$$v = -\frac{\partial \phi}{\partial y} \quad \text{و} \quad u = -\frac{\partial \phi}{\partial x}$$

بدین ترتیب $u = -\frac{\partial \phi}{\partial x} = -2ay$ و $\frac{\partial \phi}{\partial x} = 2ay$ با انتگرال گیری نسبت به x خواهیم داشت

در این رابطه $\phi = 2axy + f(y)$ هر تابع دلخواه y است. پس:

$$v = -2ax = -\frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y}[2axy + f(y)]$$

بنا براین $-2ax = -2ax - \frac{\partial f(y)}{\partial y} = -2ax - \frac{df}{dy}$ لذا $\frac{df}{dy} = 0$ و ثابت $f =$

پس خواهیم داشت:

$$\phi = 2axy + \text{ثابت}$$

← ϕ

همچنین می توان مشاهده کرد که خطوط ثابت ψ و ϕ بر هم عمود می باشند.

$$\phi = 2axy + c \quad \text{و} \quad \psi = ax^2 - ay^2$$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right) \psi = c = \frac{x}{y} \quad \text{برای ثابت } \psi = \text{ثابت} \quad ; \quad d\psi = 0 = 2axdx - 2aydy \quad \text{لذا}$$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right) \phi = c = -\frac{y}{x} \quad \text{برای ثابت } \phi = \text{ثابت} \quad ; \quad d\phi = 0 = 2aydx + 2axdy \quad \text{لذا}$$

شیب خطوط ϕ ثابت و ψ ثابت، منفی معکوس یکدیگر هستند. بنابراین خطوط ϕ ثابت عمود بر خطوط ψ ثابت هستند.

جریانهای صفحه ای ساده (شبکه جریان)

شکلهای زیادی از جریانهای پتانسیل، می تواند بوسیله انطباق بر الگوهای جریان ساده ایجاد شوند. در جدول پیوست، توابع ψ و ϕ برای پنج جریان دو بعدی ساده - شامل جریان یکنواخت uniform چشمه source، چاه sink، ورتکس vortex و قرینه doublet، به صورت خلاصه نشان داده شده اند. توابع ψ و ϕ می توانند از میدان سرعت برای هر جریان ساده بدست آیند.

یک جریان یکنواخت با سرعت ثابت موازی با محور مختصات X ، بیان کننده معادله پیوستگی و حالت غیر چرخشی است. در جدول، ۱-۶ توابع ψ و ϕ را برای یک جریان یکنواخت در جهت مثبت X مشاهده می نمائیم.

برای یک جریان یکنواخت با V ثابت، که نسبت به محور X به صورت شیبدار با زاویه α قرار گرفته است:

$$\begin{aligned} \psi &= (V \cos \alpha)y - (V \sin \alpha)x \\ \phi &= -(V \sin \alpha)y - (V \cos \alpha)x \end{aligned}$$

یک چشمه ساده (source)، دارای یک الگوی جریان در صفحه xy است به گونه ای که جریان به صورت شعاعی نسبت به محور Z و به صورت متقارن نسبت به همه محورها خارج می شود. مقدار توانایی، q ، چشمه برابر حجم جریان در واحد عمق است. در هر شعاع r ، از چشمه. سرعت مماسی، V_θ ، برابر صفر است؛ سرعت شعاعی، V_r ، برابر مقدار حجم جریان در واحد عمق، q ، تقسیم بر سطح جریان در واحد عمق، $2\pi r$ است. بنابراین برای چشمه، $V_r = \frac{q}{2\pi r}$. توابع ψ, ϕ برای یک چشمه در جدول ۱-۶ نشان داده شده اند.

در یک چاه (sink)، جریان بصورت شعاعی وارد می شود؛ چاه یک چشمه منفی است. توابع ψ و ϕ نشان داده شده در جدول برای چاه، منفی توابع مشابه خود برای یک چشمه می باشند. محل اصلی یک چاه یک نقطه می باشد، لذا زمانی که شعاع به صفر میل می کند، سرعت شعاعی به بی نهایت میل خواهد کرد.

بنابراین زمانی که یک جریان حقیقی از یک چاه و یا چشمه شکل پیدا کند، برای بعضی از مقادیر r چاه ها و چشمه ها دارای تشابه با جریان حقیقی خود نخواهند بود. ارزش مهم مفاهیم چاه ها و چشمه ها این است که زمانی که این جریانات با سایر الگوهای جریان های ساده ترکیب می شوند، الگوهای جریانی ایجاد می گردد که تا حدود زیادی بیانگر جریانهای واقعی هستند.

الگوی جریانی که در آن خطوط جریان دایره ای متحدالمرکز هستند، ورتکس (vortex) می باشد. در یک ورتکس آزاد (غیر چرخشی) ذرات سیال در حالی که در اطراف مرکز ورتکس حرکت می کنند، چرخش ندارند. توزیع سرعت در یک ورتکس غیر چرخشی، می تواند با استفاده از معادله اولر و معادله برنولی تعیین شود.

برای جریان غیر چرخشی، معادله برنولی بین هر دو نقطه ای از میدان جریان معتبر است. برای جریان در یک صفحه افقی،

$$\frac{1}{\rho} dp = V_{\theta} dV_{\theta}$$

مولفه معادله اولر عمود بر خطوط جریان می شود:

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dr} = \frac{V_{\theta}^2}{r} \quad g_r - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = a_r = \frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_{\theta}}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} + V_z \frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{V_{\theta}^2}{r} \quad \text{معادله اولر}$$

ترکیب این معادلات خواهد شد:

$$\frac{dp}{\rho} = -V_{\theta} dV_{\theta} = -\frac{V_{\theta}^2}{r} dr$$

از برابری آخر خواهیم داشت:

$$V_{\theta} dr + r dV_{\theta} = 0$$

$$d(V_{\theta} r) = 0$$

با انتگرال گیری از این معادله داریم:

$$V_{\theta} r = \text{ثابت}$$

پارامتر توانایی، (دبی)، K ، ورتکس بصورت $K = 2\pi r V_\theta$ تعریف می شود؛ K دارای ابعاد L^2/t است (حجم جریان عبوری در واحد عمق) ورتکس غیر چرخشی، تقریباً نسبتاً قابل قبول از میدان جریان در یک گرد باد می باشد (به جز ناحیه ای که یک نقطه می باشد).

آخرین الگوی جریان از نوع ساده که در جدول آورده شده است، جریان قرینه (doublet) می باشد. این جریان، بصورت ریاضی بوسیله برقراری یک چشمه و یک چاه که دارای مقادیر دبی یکسان و ادغام شده ای هستند، ایجاد می گردد. در یک محدوده، در حالیکه مسافت، ds ، بین آنها (چشمه و چاه) به صفر میل می کند، توانایی آنها افزایش می یابد؛ لذا مقدار تولید $q \frac{\delta s}{2\pi}$ به یک مقدار محدود، Λ ، میل می کند که بیانگر مقدار توانایی جریان قرینه می باشد.

Table 6.1 Elementary Plane Flows

	<p>Uniform Flow (positive x direction)</p>	
	$u = U \quad \psi = Uy$ $v = 0 \quad \phi = -Ux$ <p>$\Gamma = 0$ around any closed curve</p>	
	<p>Source Flow (from origin)</p>	
	$V_r = \frac{q}{2\pi r} \quad \psi = \frac{q}{2\pi} \theta$ $V_\theta = 0 \quad \phi = -\frac{q}{2\pi} \ln r$	
	<p>Origin is singular point q is volume flow rate per unit depth $\Gamma = 0$ around any closed curve</p>	
	<p>Sink Flow (toward origin)</p>	
	$V_r = -\frac{q}{2\pi r} \quad \psi = -\frac{q}{2\pi} \theta$ $V_\theta = 0 \quad \phi = \frac{q}{2\pi} \ln r$	
	<p>Origin is singular point q is volume flow rate per unit depth $\Gamma = 0$ around any closed curve</p>	
	<p>Irrotational Vortex (counter-clockwise, center at origin)</p>	
	$V_r = 0 \quad \psi = -\frac{K}{2\pi} \ln r$ $V_\theta = \frac{K}{2\pi r} \quad \phi = -\frac{K}{2\pi} \theta$	
	<p>Origin is singular point K is strength of the vortex $\Gamma = K$ around any closed curve enclosing origin $\Gamma = 0$ around any closed curve not enclosing origin</p>	
	<p>Doublet (center at origin)</p>	
	$V_r = -\frac{\Lambda}{r^2} \cos \theta \quad \psi = -\frac{\Lambda \sin \theta}{r}$ $V_\theta = -\frac{\Lambda}{r^2} \sin \theta \quad \phi = -\frac{\Lambda \cos \theta}{r}$	
	<p>Origin is singular point Λ is strength of the doublet $\Gamma = 0$ around any closed curve</p>	

حالت‌های ترکیبی جریانهای دو بعدی ساده superposition

در بخش قبلی، مشاهده کردیم که توابع ψ, ϕ برای جریان غیر قابل تراکم و غیر چرخشی به صورت معادله لاپلاس نوشته می شوند. از آنجایی که معادله لاپلاس یک معادله دیفرانسیل جزئی همگون خطی است، معادلات جریانهای دو بعدی ساده می توانند روی هم قرار داده شوند (به هم اضافه شوند) تا الگوهای جریان مرکب و جالبی به دست آیند. بنابراین، اگر ψ_1, ψ_2 شرایط معادله لاپلاس را داشته باشند، پس به همین ترتیب $\psi_3 = \psi_1 + \psi_2$ نیز شرایط معادله لاپلاس را دارد. جریانهای صفحه ای ایجاد شده از این حالات superposition نامیده می شوند.

موضوعیت اصلی حالت‌های فوق العاده جریانهای ساده، ایجاد الگوهای مشابه موارد عملی است. کار بر روی این الگوها به سالهای قبل از ۱۹۰۰ تعلق دارد که ریاضی دانان بسیاری را به خود جذب کرده بود.

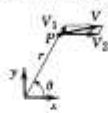
در سالهای آخر قرن نوزدهم، دانشمندان هیدرودینامیک در ایجاد نتایجی که با واقعیت همخوانی داشته باشد، ناکام ماندند. دو چیز این حالت را تغییر داد:

اول، آقای پرانتل مفهوم لایه های مرزی را معرفی نمود و به تئوری مربوط به آن پرداخت و دوم علاقه مندی به دانش هوا نوردی بطور گسترده ای در اول دهه 1900 گسترش پیدا کرد.

پرانتل با آنالیز ریاضی و آزمایشهای ساده ای نشان داد که اثرات لزوجت محدود به یک لایه مرزی نازک در قسمتهای نزدیک جداره یک جریان است. حتی برای سیالات حقیقی، جریان خارج از لایه مرزی مانند یک سیال بدون لزوجت رفتار می کند. گرادیان فشار از درون جریان روی لایه مرزی تاثیر می گذارد.

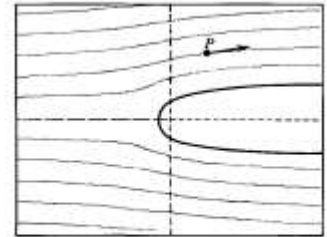
Table 6.2 Superposition of Elementary Plane Flows

Source and Uniform Flow (flow past a half-body)

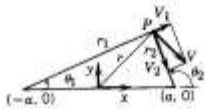


$$\psi = \psi_{s,0} + \psi_{u,f} = \psi_1 + \psi_2 = \frac{q}{2\pi}\theta + Uy = \frac{q}{2\pi}\theta + Ur \sin\theta$$

$$\phi = \phi_{s,0} + \phi_{u,f} = \phi_1 + \phi_2 = -\frac{q}{2\pi} \ln r - Ux = -\frac{q}{2\pi} \ln r - Ur$$

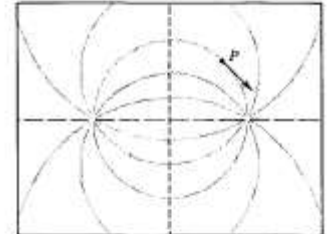


Source and Sink (equal strength, separation distance on x axis = 2a)

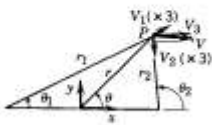


$$\psi = \psi_{s,0} + \psi_{s,i} = \psi_1 + \psi_2 = \frac{q}{2\pi}\theta_1 - \frac{q}{2\pi}\theta_2 = \frac{q}{2\pi}(\theta_1 - \theta_2)$$

$$\phi = \phi_{s,0} + \phi_{s,i} = \phi_1 + \phi_2 = -\frac{q}{2\pi} \ln r_1 + \frac{q}{2\pi} \ln r_2 = \frac{q}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}$$



Source, Sink, and Uniform Flow (flow past a Rankine body)



$$\psi = \psi_{s,0} + \psi_{s,i} + \psi_{u,f} = \psi_1 + \psi_2 + \psi_3 = \frac{q}{2\pi}\theta_1 - \frac{q}{2\pi}\theta_2 + Uy$$

$$\psi = \frac{q}{2\pi}(\theta_1 - \theta_2) + Ur \sin\theta$$

$$\phi = \phi_{s,0} + \phi_{s,i} + \phi_{u,f} = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 = -\frac{q}{2\pi} \ln r_1 + \frac{q}{2\pi} \ln r_2 - Ux$$

$$\phi = \frac{q}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1} - Ur \cos\theta$$

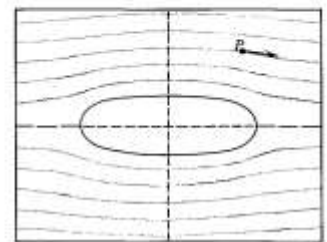
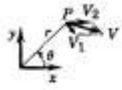


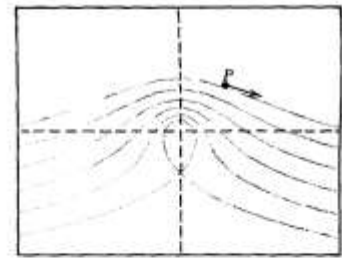
Table 6.2 Superposition of Elementary Plane Flows (cont'd.)

Vortex (clockwise) and Uniform Flow

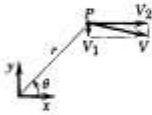


$$\psi = \psi_v + \psi_{u,f} = \psi_1 + \psi_2 = \frac{K}{2\pi} \ln r + Uy = \frac{K}{2\pi} \ln r + Ur \sin \theta$$

$$\phi = \phi_v + \phi_{u,f} = \phi_1 + \phi_2 = \frac{K}{2\pi} \theta - Ux = \frac{K}{2\pi} \theta - Ur \cos \theta$$



Doublet and Uniform Flow (flow past a cylinder)

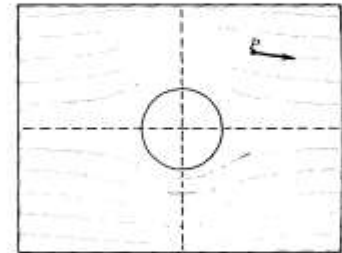


$$\psi = \psi_d + \psi_{u,f} = \psi_1 + \psi_2 = -\frac{\Lambda \sin \theta}{r} + Uy = -\frac{\Lambda \sin \theta}{r} + Ur \sin \theta$$

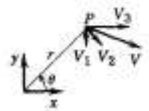
$$\phi = U \left(r - \frac{\Lambda}{Ur} \right) \sin \theta = Ur \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \sin \theta \quad a = \sqrt{\frac{\Lambda}{U}}$$

$$\phi = \phi_d + \phi_{u,f} = \phi_1 + \phi_2 = -\frac{\Lambda \cos \theta}{r} - Ux = -\frac{\Lambda \cos \theta}{r} - Ur \cos \theta$$

$$\phi = U \left(r + \frac{\Lambda}{Ur} \right) \cos \theta = -Ur \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \cos \theta$$



Doublet, Vortex (clockwise), and Uniform Flow (flow past a cylinder with circulation)

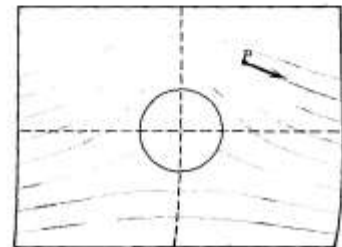


$$\psi = \psi_d + \psi_v + \psi_{u,f} = \psi_1 + \psi_2 + \psi_3 = -\frac{\Lambda \sin \theta}{r} + \frac{K}{2\pi} \ln r + Uy$$

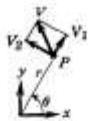
$$\psi = -\frac{\Lambda \sin \theta}{r} + \frac{K}{2\pi} \ln r + Ur \sin \theta = Ur \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \sin \theta + \frac{K}{2\pi} \ln r$$

$$\phi = \phi_d + \phi_v + \phi_{u,f} = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 = -\frac{\Lambda \cos \theta}{r} + \frac{K}{2\pi} \theta - Ux$$

$$a = \sqrt{\frac{\Lambda}{U}}; K < 4\pi a U \quad \phi = -\frac{\Lambda \cos \theta}{r} + \frac{K}{2\pi} \theta - Ur \cos \theta = -Ur \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \cos \theta + \frac{K}{2\pi} \theta$$

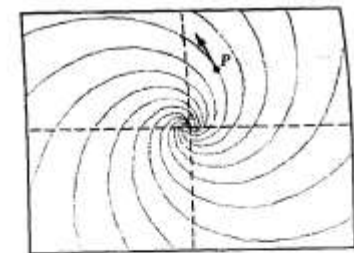


Source and Vortex (spiral vortex)

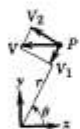


$$\psi = \psi_{s,o} + \psi_v = \psi_1 + \psi_2 = \frac{q}{2\pi} \theta - \frac{K}{2\pi} \ln r$$

$$\phi = \phi_{s,o} + \phi_v = \phi_1 + \phi_2 = -\frac{q}{2\pi} \ln r - \frac{K}{2\pi} \theta$$

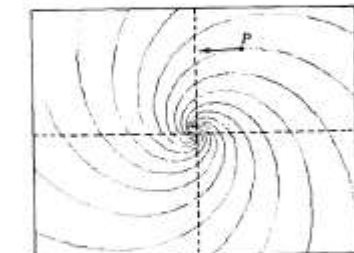


Sink and Vortex

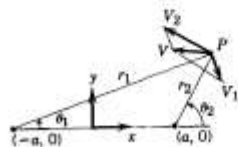


$$\psi = \psi_{s,i} + \psi_v = \psi_1 + \psi_2 = -\frac{q}{2\pi} \theta - \frac{K}{2\pi} \ln r$$

$$\phi = \phi_{s,i} + \phi_v = \phi_1 + \phi_2 = \frac{q}{2\pi} \ln r - \frac{K}{2\pi} \theta$$

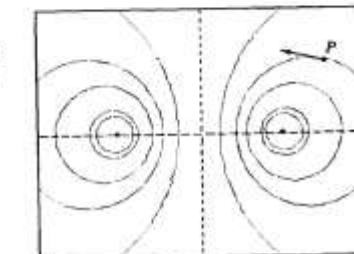


Vortex Pair (equal strength, opposite rotation, separation distance on x axis = 2a)



$$\psi = \psi_{v,1} + \psi_{v,2} = \psi_1 + \psi_2 = -\frac{K}{2\pi} \ln r_1 + \frac{K}{2\pi} \ln r_2 = \frac{K}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

$$\phi = \phi_{v,1} + \phi_{v,2} = \phi_1 + \phi_2 = -\frac{K}{2\pi} \theta_1 + \frac{K}{2\pi} \theta_2 = \frac{K}{2\pi} (\theta_2 - \theta_1)$$



دو روش برای ترکیب جریانهای ساده ممکن است استفاده گردد. روش مستقیم، در برگیرنده ترکیب جریانهای ساده است. سپس مستقیماً الگوی خطوط جریان، شکل جریان، میدان سرعت، نقطه سکون و توزیع فشار محاسبه می شوند. مثالهای متعددی از الگوهای جریان که با روش مستقیم به دست آمده اند، در جدول نشان داده شده اند.

مثال زیر، ترکیب یک جریان قرینه با یک جریان یکنواخت را نشان می دهد، که ترکیب آنها الگوی جریان ایده آل در اطراف یک سیلندر را نشان می دهد. الگوهای جریان پیچیده می تواند بوسیله ترکیب جریانهای ساده بدست آید. روش معکوس، شکل بدنه جریان را برای بدست آوردن توزیع فشار دلخواه محاسبه می کند. این روش نیاز به محاسبات کامپیوتری زیادی دارد تا توزیع فشار دلخواه بدست آید. امروزه از روشهای مستقیم یا معکوس با استفاده از برنامه های بزرگ کامپیوتری برای حل مسائل پیچیده سه بعدی استفاده می شود.

مثال: جریان در اطراف یک سیلندر: جریان ترکیبی جریان قرینه و جریان یکنواخت

برای جریان دوبعدی، غیر قابل تراکم، غیر چرخشی، ترکیب یک جریان قرینه و جریان یکنواخت بیانگر جریان در اطراف یک سیلندر دایره ای شکل می باشد. تابع جریان و پتانسیل سرعت برای این الگوی جریان را بدست آورید. میدان سرعت را پیدا کنید: نقاط سکون و سطح سیلندر را مشخص کنید و توزیع فشار سطحی را بدست آورید.

مثال: داده ها: جریان دو بعدی، غیر قابل تراکم، غیر چرخشی ایجاد شده توسط حالت فوق العاده یک جریان قرینه و جریان یکنواخت.
خواسته ها:

الف: تابع و پتانسیل سرعت

ب: میدان سرعت

ج: نقاط سکون

د: سطح سیلندر

ه: توزیع فشار سطحی

راه حل: توابع جریان می توانند با هم جمع شوند. زیرا میدان جریان غیر قابل تراکم و غیر چرخشی است.

بنابراین از جدول قبل تابع جریان برای ترکیب خواهد شد.

$$\psi = \underbrace{\psi_d}_{\text{قریبه}} + \underbrace{\psi_{uf}}_{\text{بکساخت}} = -\frac{\Lambda \sin \theta}{r} + Ur \sin \theta$$

← ψ

پتانسیل سرعت خواهد شد

$$\phi = \phi_d + \phi_{uf} = -\frac{\Lambda \cos \theta}{r} - Ur \cos \theta$$

← ϕ

با استفاده از معادله $V_r = -\frac{\partial \phi}{\partial r}$ و $V_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta}$ مولفه های سرعت مربوطه بصورت زیر بدست می آیند.

$$V_r = -\frac{\partial \phi}{\partial r} = -\frac{\Lambda \cos^2 \theta}{r^2} + U \cos \theta$$

$$V_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -\frac{\Lambda \sin \theta}{r^2} - U \sin \theta$$

میدان سرعت می شود

$$\vec{V} = V_r \hat{e}_r + V_\theta \hat{e}_\theta = \left(-\frac{\Lambda \cos \theta}{r^2} + U \cos \theta \right) \hat{e}_r + \left(-\frac{\Lambda \sin \theta}{r^2} - U \sin \theta \right) \hat{e}_\theta$$

← \vec{V}

نقاط سکون جاهایی هستند که $\vec{V} = V_r \hat{e}_r + V_\theta \hat{e}_\theta = 0$ بنابراین:

$$V_r = 0 = -\frac{\Lambda \cos \theta}{r^2} + U \cos \theta = \cos \theta \left(U - \frac{\Lambda}{r^2} \right)$$

بنابراین، $V_r = 0$ وقتی $r = \sqrt{\frac{\Lambda}{U}} = a$ همچنین:

$$V_\theta = 0 = -\frac{\Lambda \sin \theta}{r^2} - U \sin \theta = -\sin \theta \left(U + \frac{\Lambda}{r^2} \right)$$

بنابراین $V_\theta = 0$ وقتی که $\theta = 0$ و π .

نقاط سکون خواهد شد $(a, 0)$ و (a, π) .

← نقاط سکون

قابل توجه اینکه در طول $r = a$ داریم: $V_r = 0$ ، بنابراین این حالت بیانگر جریان اطراف یک سیلندر دایره ای است همانطور که در جدول نشان داده شده است، جریان غیر چرخشی است، بنابراین معادله برنولی بین هر دو نقطه درون جریان می تواند بکار رود. با بکارگیری این معادله بین یک نقطه در خیلی بالا دست و یک نقطه روی سطح سیلندر (با صرف نظر از اختلاف ارتفاع) خواهیم داشت:

$$\frac{p_\infty}{\rho} + \frac{U^2}{2} + gz = \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz$$

بنابراین:

$$p - p_\infty = \frac{1}{2}\rho(U^2 - V^2)$$

در طول سطح $r = a$ و

$$V^2 = V_\theta^2 = \left(-\frac{\Lambda}{a^2} - U\right)^2 \sin^2 \theta = 4U^2 \sin^2 \theta$$

از آنجائیکه $\Lambda = Ua^2$ با جایگزینی خواهیم داشت:

$$p - p_\infty = \frac{1}{2}\rho(U^2 - 4U^2 \sin^2 \theta) = \frac{1}{2}\rho U^2 (1 - 4 \sin^2 \theta)$$

یا

$$\frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho U^2} = 1 - 4 \sin^2 \theta$$

← توزیع فشار

{ این مسئله، روشهای مورد استفاده برای ترکیب جریانهای صفحه ای ساده برای بدست آوردن یک الگوی جریان کاربردی را شرح می دهد. }

خلاصه مطالب فصل

در این فصل مطالب زیر مورد مطالعه قرار گرفت:

- ۱- معادلات اولر به اشکال: الف: برداری ب: مختصات مستطیلی ج: مختصات استوانه ای
د: خط جریان
- ۲- انتگرال گیری از معادله اولر در طول خط جریان برای بدست آوردن معادله برنولی. محدودیتهای معادله برنولی
- ۳- تعریف فشار استاتیک، فشار سکون و فشار دینامیکی
- ۴- معادله غیر ماندگار برنولی در طول خط جریان و بیان محدودیتهای آن
- ۵- دیدیم که برای جریان ماندگار، غیرلزج، غیر قابل تراکم که غیر چرخشی نیز باشد معادله برنولی بین هر دو نقطه از جریان قابل بکارگیری است.
- ۶- برای جریان دوبعدی، غیر چرخشی، غیر قابل تراکم
الف: تعیین پتانسیل سرعت، ϕ ، با استفاده از میدان سرعت (معادله سرعت)
ب: تعیین معادله سرعت با استفاده از معادله پتانسیل سرعت، ϕ
ج: ملاحظه شد که خطوط ψ ثابت و ϕ ثابت برهم عمودند
د: تعیین ϕ با استفاده از ψ و بعکس
- ۷- با داشتن تابع جریان، ψ ، برای یک جریان دو بعدی، غیر چرخشی پیرامون یک جسم تعیین
الف: معادله جسم
ب: توزیع فشار در طول سطح جسم

فصل پنجم

جریان لزج غیر قابل تراکم بیرونی Flow External Incompressible Viscous

جریانهای بیرونی جریانهای روی اجسام غوطه ور در یک سیال نامحدود می باشند. جریان روی یک صفحه صاف نسبتاً نامحدود و جریان از روی یک سیلندر، مثالهایی از جریانهای بیرونی هستند (شکل). هدف ما در این فصل بیان رفتار سیالات لزج غیر قابل تراکم در جریان بیرونی است. در شکل یک جریان لزج در رینالدز بالا در حال عبور از یک بال هواپیما نشان داده شده و پدیده های بسیاری که در این جریان روی یک جسم ایجاد می شود روی شکل تشریح شده اند.

جریان آزاد در نقطه سکون تقسیم شده و در اطراف جسم جریان می یابد. سیال روی سطح در حالت بدون لغزش باقی مانده و روی سرعت بدنه اثر می گذارد. (در شکل برای وضوح بیشتر ضخامت لایه مرزی روی هر دو سطح بزرگتر از واقعیت نشان داده شده است). جریان در لایه های مرزی ابتدا ورقه ای است، جریان حد واسط (بینابین) به طرف درهم بسته به حالت جریان آزاد، زبری سطح و گرادیان فشار، با مقداری فاصله از نقطه سکون اتفاق می افتد. نقاط بینابین با علامت «T» در شکل مشخص شده اند. لایه مرزی درهم (آشفته) درست بعد از ناحیه بینابین با سرعت زیادی نسبت به لایه های مرزی ورقه ای رشد می نماید. بر اثر ایجاد ضخامت لایه های مرزی روی سطح، خطوط جریان مقداری تغییر مکان خواهند داشت. در منطقه ای که فشار افزایش می یابد (گرادیان فشار معکوس)، جدایی جریان ممکن است رخ دهد. نقاط جدایی در شکل با علامت «S» مشخص شده اند. سیالی که در لایه های مرزی روی سطوح حجم قرار داشت، بعد از نقاط جدایش تشکیل جریان برگشتی *viscous wake* را می دهد.

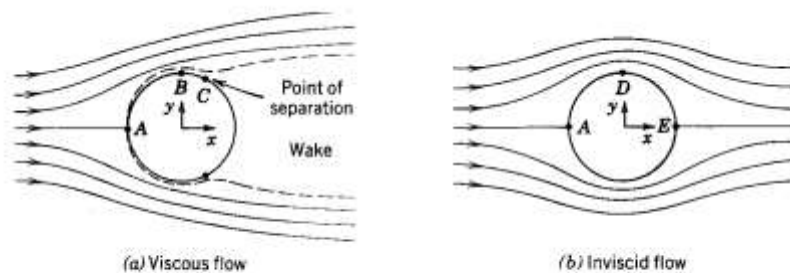


Fig. 2.12 Qualitative picture of incompressible flow over a cylinder.

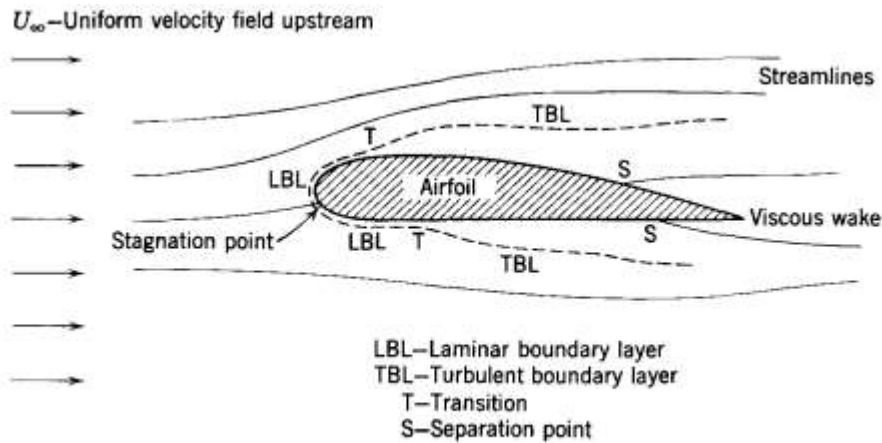


Fig. 9.1 Details of viscous flow around an airfoil.

قسمت A این فصل اختصاص به جریانهای لایه مرزی دارد. بعد از بحث در مورد مفهوم لایه مرزی، راه حل کامل برای جریان لایه مرزی ورقه ای روی یک صفحه صاف (گرادیان فشار صفر) ارائه شده است. از آنجایی که راه حل های دقیق برای لایه های مرزی درهم وجود ندارد. راه حل های تقریبی باید مورد استفاده قرار گیرد. معادله انتگرالی مومنتم برای گرادیان فشار غیر صفر با استفاده از قوانین اولیه بصورت اساسی برای راه حل های تقریبی استخراج گردیده است. راه حل های تقریبی برای جریان ورقه ای و درهم روی صفحات صاف مورد توجه قرار گرفته است. راه حل های تقریبی برای جریان لایه های مرزی با گرادیانهای فشار خارج از اهداف این بخش است، اثرات گرادیانهای فشار روی جریانهای لایه های مرزی مورد بحث قرار گرفته است.

بال هواپیمای نشان داده شده در شکل تحت تاثیر نیروی خالص ناشی از نیروهای برشی و فشاری وارد بر سطوح خود قرار دارد. مولفه نیروی خالص موازی با جریان یکنواخت بالا دست، U_∞ ، نیروی کششی نامیده می شود؛ با مولفه نیروی خالص عمود بر U_∞ نیروی بالا برنده نامیده می شود. حضور جدایی در جریان مانع از تعیین حل ریاضی مقدار نیروی بالا برنده و نیروی کششی است. در قسمت B این فصل، آنالیز تقریبی و همبستگی های ارقام تجربی بدست آمده برای نیروی بالا برنده و کششی روی تعدادی از اجسام متفاوت ارائه شده است.

قسمت A لایه های مرزی

مفهوم لایه مرزی

مفهوم لایه مرزی اولین بار توسط لادویگ پرائنل دانشمند *aerodynamicist* آلمانی در سال ۱۹۰۴ معرفی گردید.

پیش از تحقیقات پرائنل، علم مکانیک سیالات در دو مسیر تقریباً مختلف پیشرفت نموده بود. **هیدرودینامیک تئوری**، نشأت گرفته از معادله حرکت اولر برای یک سیال بدون لزوجت است. از آنجایی که نتایج حاصل از هیدرودینامیک با خیلی از مشاهدات تجربی تناقض داشت، مهندسين کاربردی کارهای تجربی خود را در هیدرولیک توسعه می دادند. این مطالعات بر ارقام تجربی استوار بود که با نتایج کارهای ریاضی محض هیدرودینامیک تئوری مقدار نسبتاً زیادی فاصله داشت. هر چند معادلات کامل حرکت سیال لزج (معادلات ناویر - استوکس) قبل از پرائنل شناخته شده بود، اما مشکل حل ریاضی این معادلات (بجز در مورد چند حالت ماده) مانع از شناخت رفتار جریانات لزج گردید.

پرائنل نشان داد که خیلی از جریانهای لزج می توانند بوسیله تقسیم نمودن جریان به دو ناحیه، یکی نزدیک به بدنه سخت مرزی، و دیگری بقیه میدان جریان مورد تجزیه و تحلیل واقع شوند. تنها در ناحیه نازک مجاور مرزهای جامد (لایه مرزی) اثرات لزوجت اهمیت پیدا می کند. در ناحیه بیرون از لایه مرزی، اثرات لزوجت قابل صرف نظر می باشند و سیال مانند سیال بدون لزوجت رفتار می نماید.

مفهوم لایه مرزی اتصال بین تئوری صرف و عمل را ایجاد نمود. مضافاً اینکه مفهوم لایه مرزی حل مسائل جریان لزج که از طریق بکارگیری معادلات ناویر - استوکس برای همه میدان جریان امکان پذیر نبود، ممکن ساخت (امروزه حل کامپیوتری معادلات ناویر - استوکس معمول می باشد). بنابراین معرفی مفهوم لایه مرزی شروع دوره جدید مکانیک سیالات محسوب می شود.

در لایه مرزی هر دو نیروهای لزوجت و اینرسی اهمیت دارند.

در نتیجه منطقی است که عدد رینالدز (که بیانگر نسبت نیروهای اینرسی به لزوجتی است) در تعیین وضعیت جریانهای لایه مرزی دارای اهمیت باشد.

مشخصه طول بکار گرفته شده در عدد رینالدز، می تواند هم مقدار طول در جهت جریان که لایه مرزی در آن ایجاد گردیده باشد و یا اندازه ضخامت لایه مرزی (مانند جریان در یک مجرای بسته) باشد. جریان در یک لایه مرزی ممکن است ورقه ای یا درهم باشد. در لایه مرزی مقدار مشخص و ثابتی برای عدد رینالدز که در آن ناحیه انتقال (بینابین) از جریان ورقه ای به درهم رخ می دهد، وجود ندارد. از میان

فاکتورهایی که بر لایه مرزی بینابین اثر دارند می توان از گرادیان فشار، زبری سطح، انتقال حرارت، نیروهای وزنی و آشفتگی های جریان آزاد نام برد. جزئیات بررسی این اثرات فراتر از اهداف این درس می باشد.

در خیلی از حالات جریان حقیقی، لایه مرزی روی یک صفحه طویل مسطح تشکیل می شود. مثالهایی از این لایه شامل جریان روی بدنه کشتی و زیر دریایی، بالهای هواپیما و حرکت هوا روی زمین مسطح می باشند. از آنجایی که اساس طرح همه این جریانها با حالت ساده جریان روی یک صفحه مسطح قابل تشریح می باشد، ابتدا این حالت را مورد رسیدگی قرار می دهیم.

در شکل زیر نحوه گسترش لایه مرزی روی یک صفحه مسطح با یک شکل توصیفی نشان داده شده است. لایه مرزی برای یک فاصله کوتاه پایین دست لبه صفحه ورقه ای می باشد؛ بینابین در ناحیه کوتاهی اتفاق می افتد، ناحیه بینابین (انتقالی) به طرف پایین دست تا نقطه ای که جریان لایه مرزی کاملاً در هم شود، ادامه یافته است.

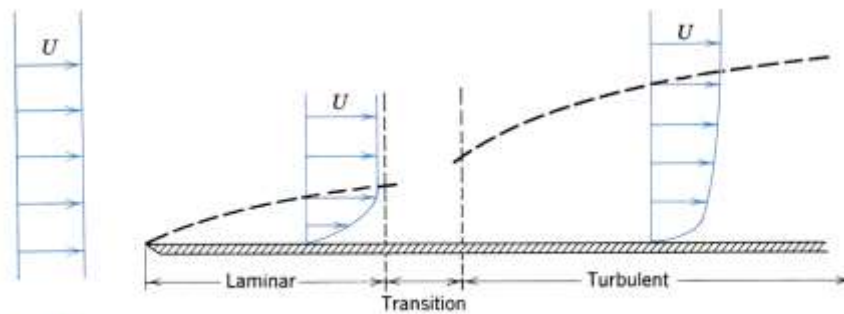
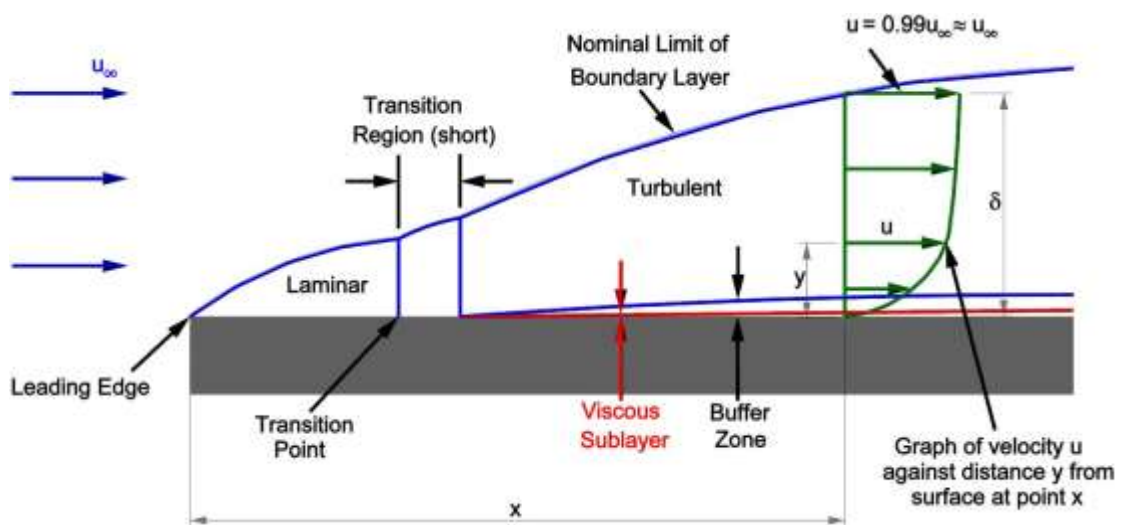


Fig. 9.2 Boundary layer on a flat plate (vertical thickness exaggerated greatly).



برای جریان غیر قابل تراکم روی یک صفحه مسطح صاف (گرادیان فشار صفر) بدون وجود انتقال حرارت، و اگر آشفتگی های بیرونی ناحیه به حداقل برسد انتقال از جریان ورقه ای به درهم در لایه

مرزی ممکن است تا عدد رینالدز $\left(R_{ex} = \frac{\rho U x}{\mu}\right)$ بیشتر از یک میلیون نیز به تاخیر بیافتد.

برای محاسبات تحت حالات جریان کاربردی، شروع ناحیه انتقال (بینابین)، معمولاً در عدد رینالدز طولی ۵۰۰۰۰۰ در نظر گرفته می شود. برای هوا در شرایط استاندارد با سرعت آزاد $U = 30 \text{ m/s}$ این مقدار

به طول، x ، در مسیر صفحه $x \approx 0.24 \text{ m}$ مربوط است. در شکل می توانیم ببینیم که لایه مرزی درهم با

سرعت بیشتری نسبت به لایه مرزی ورقه ای رشد می نماید. در بخشهای بعدی این فصل خواهیم یافت

که این وضعیت کاملاً درست می باشد.

ضخامت لایه مرزی

لایه مرزی ناحیه ای است نزدیک به سطح جامد که در آن نیروهای لزوجتی دارای اهمیت هستند. ضخامت لایه مرزی، δ ، معمولاً بصورت فاصله از سطح تا نقطه ای که سرعت ۱ درصد از سرعت جریان آزاد فاصله دارد، تعریف می شود. از آنجائیکه پروفیل سرعت بتدریج و در فاصله ای طولانی به خطوط آزاد وصل می شود، اندازه گیری ضخامت لایه مرزی، δ ، مشکل است.

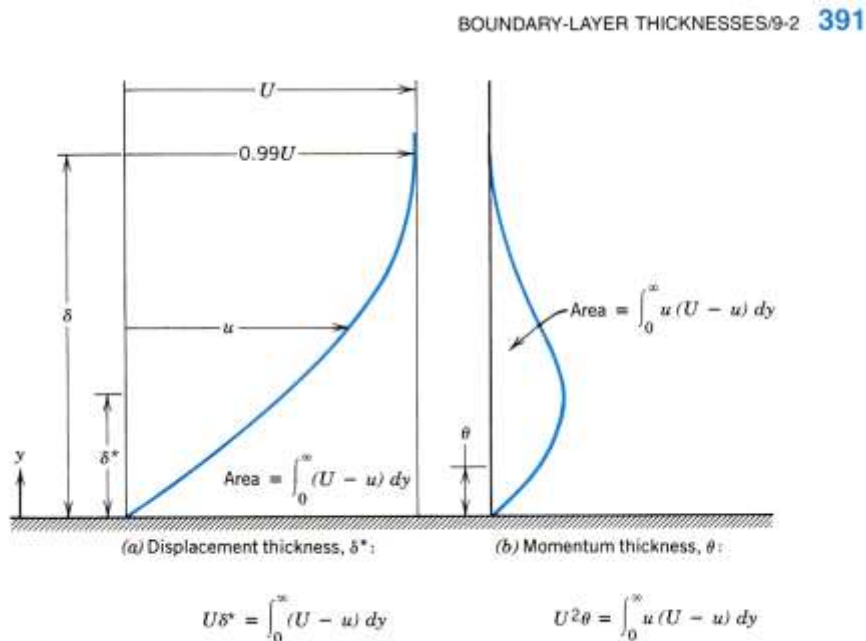


Fig. 9.3 Boundary-layer thickness definitions.

اثر نیروهای لزوجتی در لایه مرزی، کند کردن جریان است. مقدار جریان جرمی عبوری نزدیک به سطح جامد (با حضور لایه مرزی)، کمتر از مقدار جریان جرمی عبوری از این منطقه در حالت بدون حضور لایه مرزی می باشد.

کاهش در مقدار جریان جرمی عبوری بر اثر وجود نیروهای لزوجتی برابر $\int_0^{\infty} \rho(U-u)w dy$ است که در آن w پهنای صفحه در جهت عمود بر جریان می باشد.

اگر نیروهای لزوجتی وجود نداشتند، سرعت در مقطع U می بود. ضخامت تغییر مکان، δ^* ، فاصله ای است که در آن مرزهای جامد باید جابجا شوند تا در یک جریان بدون اصطحاک مقدار کمبود جریان جرمی برابر کمبود جریان با حضور لایه مرزی بشود. جابجایی مرزها به اندازه δ^* کمبود جریان جرمی $\rho U \delta^* w$ را بدنبال خواهد داشت. بنابراین همانطور که در شکل a ۹/۳ شرح داده شده است:

$$\rho U \delta^* w = \int_0^{\infty} \rho(U-u)w dy$$

برای جریان غیر قابل تراکم، ثابت $\rho =$ است و داریم:

$$\delta^* = \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy \approx \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy$$

از آنجائیکه در $y = \delta$ ، $u \approx U$ است، تابع زیر انتگرال برای $y \geq \delta$ باید اساساً صفر باشد.

همچنین تاخیر جریان در لایه مرزی باعث کاهش در شارمومنتم در هر مقطع نسبت به جریان بدون لزوجت می گردد. کاهش مومنتم مقدار جریان جرمی واقعی، $\int_0^{\infty} \rho u w dy$ ، در لایه مرزی برابر است با

$$\int_0^{\infty} \rho u (U - u) w dy$$

اگر نیروهای لزوجتی وجود نداشتند، لازم بود که مرزهای سخت جریان به طرف داخل جابجا شوند تا مقدار کاهش مومنتم بدست آید؛ در این فاصله (ضخامت مومنتم) که با θ نشان داده می شود، مقدار کاهش مومنتم برابر $\rho U^2 \theta w$ خواهد بود.

ضخامت مومنتم، θ ، بصورت ضخامت لایه ای از سیال با سرعت U تعریف می شود که در آن مقدار شارمومنتم برابر مقدار کاهش شارمومنتم در لایه مرزی تعریف می شود. بنابراین همانطور که در شکل b ۹/۳ تشریح شده است.

$$\rho U^2 \theta = \int_0^{\infty} \rho u (U - u) dy$$

برای جریان غیر قابل تراکم، ثابت $\rho =$ است و داریم:

$$\theta = \int_0^{\infty} \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy \approx \int_0^{\delta} \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy$$

بار دیگر مقدار تابع زیر انتگرال برای $y \geq \delta$ صفر می باشد

مقدار جابجایی و ضخامت مومنتم، δ^* و θ ضخامت انتگرالی هستند، زیرا تعاریف آنها برحسب انتگرال در فاصله لایه مرزی می باشند. به همین دلیل ساده تر است که این دو مقدار با استفاده از مقادیر تجربی برای تعیین ضخامت لایه مرزی، δ ، مورد ارزیابی واقع شوند.

مشاهده کردیم که پروفیل سرعت در لایه های مرزی بتدریج بصورت مماسی به سرعت آزاد جریان وصل می شود. مفروضاتی که برای ساده کردن مسئله معمولاً برای تجزیه و تحلیل مهندسی گسترش لایه مرزی در نظر گرفته می شود عبارتند از:

$$1- \text{ در } y = \delta \text{ داریم } u \rightarrow U$$

$$2- \text{ در } y = \delta \text{ داریم } \frac{\partial u}{\partial y} \rightarrow 0$$

$$3- \text{ درون لایه مرزی } v \ll U$$

نتایج تجزیه و تحلیل که در دو بخش بعدی ارائه شده، نشان می دهد که لایه مرزی نسبت به طول گسترش آن در طول صفحه بسیار نازک می باشد. بنابراین می توان فرض کرد که:

۴- تغییرات فشار در لایه نازک مرزی قابل صرف نظر می باشد. توزیع فشار در جریان آزاد بر لایه مرزی اثر می گذارد.

مثال: لایه مرزی در جریان تونل

یک تونل آزمایشگاهی باد، دارای مقطع مربعی به ابعاد ۳۰۵ میلی متر است. پروفیل‌های سرعت لایه مرزی در دو مقطع اندازه گیری شد و ضخامت جابجایی از پروفیل‌های اندازه گیری شده بدست آمدند. در مقطع (۱) که در آن جریان آزاد دارای سرعتی برابر $U_1 = 26 \text{ m/s}$ است، مقدار ضخامت جابجایی $\delta_1^* = 1.5 \text{ mm}$ می باشد. در مقطع (۲) واقع شده در پائین دست مقطع (۱) $\delta_2^* = 2.1 \text{ mm}$ می باشد. محاسبه کنید مقدار تغییر فشار استاتیک بین مقطع (۱) و (۲) را. نتایج را بصورت نسبتی از فشار دینامیک جریان آزاد (freestream) در مقطع (۱) بیان کنید. فرض کنید شرایط هوای استاندارد وجود دارد.

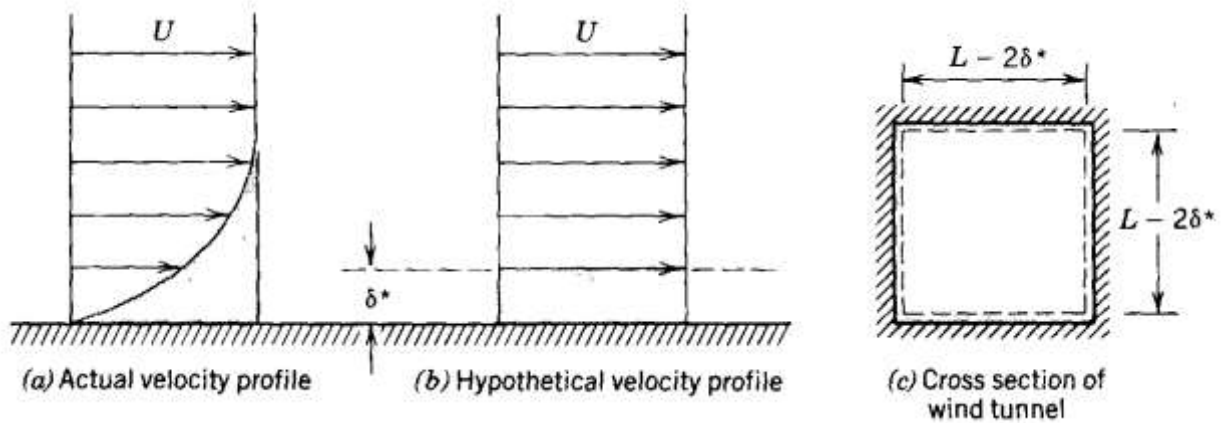
مثال

داده ها: جریان استاندارد هوا در تونل آزمایشگاهی باد. مقطع اندازه گیری مربعی با $L = 305 \text{ mm}$ است ضخامت جابجایی $\delta_1^* = 1.5 \text{ mm}$ و $\delta_2^* = 2.1 \text{ mm}$ هستند. جریان آزاد دارای سرعت $U_1 = 26 \text{ m/s}$ است.

خواسته: تغییر در فشار استاتیک بین مقاطع (۱) و (۲). (بصورت نسبی از فشار دینامیک جریان آزاد در مقطع ۱ بیان کنید).

راه حل:

از مفهوم ضخامت جابجایی برای پیدا کردن سطح جریان موثر برای جریان آزاد بیرون از لایه های نازک مرزی دیواره استفاده کنید. پروفیل‌های سرعت لایه مرزی واقعی را با پروفیل‌های یکنواخت سرعت جایگزین نمائید همانطور که در شکل‌های زیر نشان داده شده است:



با بکارگیری معادلات پیوستگی و برنولی برای خط آزاد جریان در ناحیه بیرون ضخامت جابجایی لایه مرزی، که در آن اثرات لزوجت قابل صرفنظر می باشد، خواهیم داشت:

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} \rho dV + \int \rho \vec{V} \cdot \vec{dA} \quad \text{معادلات اساسی:}$$

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{V_1^2}{2} + gz_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{V_2^2}{2} + gz$$

مفروضات :

- ۱) جریان ماندگار
- ۲) جریان غیر قابل تراکم
- ۳) جریان در هر مقطع بیرون از δ^* ، یکنواخت
- ۴) جریان در طول خط جریان بین مقاطع ۱ و ۲
- ۵) عدم وجود اثرات اصطکاک در خط آزاد جریان
- ۶) صرفنظر از تغییرات ارتفاع

از معادله برنولی بدست می آوریم:

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2} \rho (V_2^2 - V_1^2) = \frac{1}{2} \rho (U_2^2 - U_1^2) = \frac{1}{2} \rho U_1^2 \left[\left(\frac{U_2}{U_1} \right)^2 - 1 \right]$$

یا

$$\frac{p_1 - p_2}{\frac{1}{2} \rho U_1^2} = \left(\frac{U_2}{U_1} \right)^2 - 1$$

از معادله پیوستگی داریم $V_1 A_1 = U_1 A_1 = V_2 A_2 = U_2 A_2$ ، بنابراین $\frac{U_2}{U_1} = \frac{A_1}{A_2}$ که در آن

$A = (L - 2\delta^*)^2$ سطح جریان موثر می باشد. با جایگزینی خواهیم داشت :

$$\frac{p_1 - p_2}{\frac{1}{2}\rho U_1^2} = \left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 - 1 = \left[\frac{(L - 2\delta_1^*)^2}{(L - 2\delta_2^*)^2}\right]^2 - 1$$

$$\text{یا } 1/61 \text{ درصد.} \quad \frac{p_1 - p_2}{\frac{1}{2}\rho U_1^2} = \left[\frac{305 - 2(1.5)}{305 - 2(2.1)}\right]^4 - 1 = 0.0161$$

$$\leftarrow \frac{p_1 - p_2}{\frac{1}{2}\rho U_1^2}$$

این مسئله کاربرد مفهوم ضخامت جابجایی را تشریح نموده است. جریان لزج حقیقی با لایه های مرزی با یک جریان یکنواخت بدون لزوجت و با جابجایی مرزها به طول δ^* مدل گردید.

لایه مرزی ورقه ای روی یک صفحه صاف: راه حل دقیق

راه حل برای لایه مرزی ورقه ای روی یک صفحه صاف افقی در سال ۱۹۰۸ بوسیله بلاسیوس بدست آمده است. برای جریان دو بعدی، ماندگار، غیر قابل تراکم با گرادیان فشار صفر، معادلات حرکت مربوطه به شکل زیر کاهش می یابند:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \text{پیوستگی} \quad (۱)$$

$$u\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + v\frac{\partial u}{\partial y} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad \text{ناویر استوکس} \quad (۲)$$

با شرایط مرزی:

$$u = 0 \quad , \quad y = 0 \quad \text{در}$$

$$\frac{du}{dy} = 0 \quad , \quad u = U \quad , \quad y = \infty \quad \text{در}$$

بلاسیوس استدلال کرد که پروفیل سرعت u/U ، باید برای همه مقادیر x وقتی در مقابل فاصله بدون بعد از دیواره رسم شوند، مشابه باشند؛ ضخامت لایه مرزی، δ ، یک انتخاب طبیعی بود برای بدون بعد کردن فاصله از دیواره. در نتیجه راه حل به شکل زیر خواهد بود:

$$\eta \propto \frac{y}{\delta} \quad \text{که در آن} \quad \frac{u}{U} = g(\eta)$$

براساس راه حل استوکس، بلاسیوس استدلال کرد که $\delta \propto \sqrt{\frac{\nu x}{U}}$

و قرار داد: $\eta = y \sqrt{\frac{U}{\nu x}}$

با معرفی کردن تابع جریان ψ ، که در آن

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{و} \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

جایگزینی v, u در معادله $u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ ، معادله به معادله ای با یک متغیر وابسته کاهش می یابد. با تعریف تابع جریان بدون بعد بصورت:

$$f(\eta) = \frac{\psi}{\sqrt{\nu x U}}$$

در معادله $u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ ، متغیر وابسته $f(\eta)$ و متغیر غیروابسته خواهند شد. با ψ

تعریف شده بوسیله معادله فوق و η تعریف شده بوسیله معادله $\eta = y \sqrt{\frac{U}{\nu x}}$ می توانیم هر جزء از

معادله $u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ را محاسبه نمائیم.

مولفه های سرعت با روابط زیر داده می شوند:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \sqrt{\nu x U} \frac{df}{d\eta} \sqrt{\frac{U}{\nu x}} \rightarrow \frac{u}{U} = \frac{df}{d\eta}$$

و

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\left[\sqrt{\nu x U} \frac{df}{d\eta} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu U}{x}} f \right] = \left[-\sqrt{\nu x U} \frac{df}{d\eta} \left(-\frac{1}{2} \eta \frac{1}{x} \right) + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu U}{x}} f \right]$$

$$v = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu U}{x}} \left[\eta \frac{df}{d\eta} - f \right]$$

با مشتق گیری از مولفه های سرعت، همچنین می توان نشان داد که:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{U}{2x} \eta \frac{d^2 f}{d\eta^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = U \sqrt{U / \nu x} \frac{d^2 f}{d\eta^2}$$

و

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{U^2 d^3 f}{\nu x d \eta^3}$$

با جایگزینی این روابط در معادله $u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ بدست می آوریم:

$$2 \frac{d^3 f}{d\eta^3} + f \frac{d^2 f}{d\eta^2} = 0$$

با توجه به شرایط مرزی:

$$f = \frac{df}{d\eta} = 0 \quad , \quad \eta = 0 \quad \text{در}$$

$$\frac{df}{d\eta} = 1 \quad , \quad \eta = \infty \quad \text{در}$$

معادلات دیفرانسیل جزئی درجه دوم بیان کننده گسترش لایه مرزی ورقه ای روی یک صفحه صاف. (معادلات ۱ و ۲) با توجه به شرایط مرزی داده شده فوق به یک معادله دیفرانسیلی معمولی درجه سه غیر خطی تبدیل شده است.

حل معادله فوق به شکل بسته امکان پذیر نیست. بلاسیوس با بکارگیری بسط سری های توانی پیرامون $\eta = 0$ که در $\eta \rightarrow \infty$ به سمت یک بسط خط مجانب میل می کند، آن را حل نمود. این معادله بعداً توسط Howarth با روشهای عددی به صورت دقیق تری حل شد که نتایج تا ۵ رقم اعشار گزارش گردید.

مقادیر عددی f ، $\frac{df}{d\eta}$ ، $\frac{d^2 f}{d\eta^2}$ در جدول ۹/۱ با یک کامپیوتر با بکارگیری روش عددی رانج-کوتا درجه ۴ بدست آمده اند.

Table 9.1 The Function $f(\eta)$ for the Laminar Boundary Layer along a Flat Plate at Zero Incidence

$\eta = y\sqrt{\frac{U}{\nu x}}$	f	$f' = \frac{u}{U}$	f''
0	0	0	0.3321
0.5	0.0415	0.1659	0.3309
1.0	0.1656	0.3298	0.3230
1.5	0.3701	0.4868	0.3026
2.0	0.6500	0.6298	0.2668
2.5	0.9963	0.7513	0.2174
3.0	1.3968	0.8460	0.1614
3.5	1.8377	0.9130	0.1078
4.0	2.3057	0.9555	0.0642
4.5	2.7901	0.9795	0.0340
5.0	3.2833	0.9915	0.0159
5.5	3.7806	0.9969	0.0066
6.0	4.2796	0.9990	0.0024
6.5	4.7793	0.9997	0.0008
7.0	5.2792	0.9999	0.0002
7.5	5.7792	1.0000	0.0001
8.0	6.2792	1.0000	0.0000

با بکارگیری مقادیر از جدول فوق پروفیل سرعت به شکل بدون بعد با رسم u/U در مقابل η ، بدست آمده است. پروفیل بدست آمده در شکل a $9/3$ رسم شده است. پروفیل های سرعت اندازه گیری شده در آزمایشگاه به صورت بسیار عالی با نتایج راه حل تحلیلی همخوانی دارد. پروفیلها از همه نقاط یک صفحه صاف، شبیه یکدیگر هستند(وقتی همه آنها به صورت بدون بعد رسم شوند به شکل یک پروفیل در می آیند)،

از جدول فوق مشاهده می شود که در $\eta = 5.0$ ، $u/U = 0.992$. با توجه به اینکه ضخامت لایه مرزی ، δ ، به صورت مقدار y که در آن $u/U = 0.99$ تعریف شده است از معادله $\eta = y\sqrt{\frac{U}{\nu x}}$ خواهیم داشت:

$$\delta = \frac{5.0}{\sqrt{U/\nu x}} = \frac{5.0x}{\sqrt{\text{Re}_x}}$$

ضخامت لایه مرزی ، δ ، در پروفیل سرعت رسم شده در شکل a $9/3$ مشخص شده است. تنش برشی دیواره بوسیله رابطه زیر بیان می شود:

$$\tau_w = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = \mu U \sqrt{\frac{U}{\nu x}} \left. \frac{d^2 f}{d\eta^2} \right|_{\eta=0}$$

پس

$$\tau_w = 0.332U \sqrt{\rho\mu U/x} = \frac{0.332\rho U^2}{\sqrt{Re_x}}$$

و ضریب تنش برشی دیواره، C_f با رابطه زیر داده می شود:

$$C_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho U^2} = \frac{0.664}{\sqrt{Re_x}}$$

همه نتایج برای ضخامت لایه مرزی، δ ، تنش برشی دیواره τ_w و ضریب اصطکاک سطحی، C_f ، با عدد رینالدز طولی، Re_x ، با توان یک دوم ارتباط دارند. ضخامت لایه مرزی با افزایش $x^{1/2}$ ، افزایش می یابد، و تنش برشی دیواره و ضریب اصطکاک سطحی با $1/x^{1/2}$ تغییر می نمایند. این نتایج رفتار لایه مرزی ورقه ای روی یک صفحه صاف را مشخص می نماید.

مثال - لایه مرزی ورقه ای روی یک صفحه صاف: حل دقیق

با استفاده از نتایج عددی ارائه شده در جدول ۹/۱، کمیت‌های زیر را برای جریان لایه مرزی ورقه ای روی یک صفحه صاف بدست آورید

(الف) δ^*/δ (برای $\eta=5$ و وقتی که $\eta \rightarrow \infty$ بدست آورید).

(ب) v/U در لبه لایه مرزی

(ج) شیب خط جریان در لبه بالایی مرزی را با شیب δ در مقابل x مقایسه نمایید.

مثال

داده ها: راه حل عددی برای لایه مرزی ورقه ای صفحه صاف، جدول ۹/۱.

خواسته ها: (الف) δ^*/δ (برای $\eta=5$ و در $\eta \rightarrow \infty$ حساب کنید).

(ب) v/U در لبه بالایی لایه مرزی

(ج) مقایسه شیب خط جریان در لبه لایه مرزی با شیب δ در مقابل x

راه حل:

ضخامت جابجایی با معادله زیر تعریف شده است:

$$\delta^* = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy \approx \int_0^s \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy$$

$$dy = d\eta \sqrt{\frac{ux}{U}}, \quad y = \eta \sqrt{\frac{ux}{U}} \quad : \text{از معادله } \eta = y \sqrt{\frac{U}{ux}} \text{ داریم}$$

پس

$$\delta^* = \int_0^{\eta_{\max}} \left(1 - \frac{u}{U}\right) \sqrt{\frac{ux}{U}} d\eta = \sqrt{\frac{ux}{U}} \int_0^{\eta_{\max}} \left(1 - \frac{u}{U}\right) d\eta$$

توجه: حد بالایی y در معادله δ^* ، $\eta_{\max} = \infty$ یا $\eta_{\max} \approx 5$ است. (از معادله $\delta \approx \frac{5}{\sqrt{U/ux}}$)

پس:

$$\sqrt{\frac{ux}{U}} = \frac{\delta}{5}$$

$$\frac{\delta^*}{\delta} = \frac{1}{5} \int_0^{\eta_{\max}} \left(1 - \frac{u}{U}\right) d\eta$$

با جایگزینی از معادله $u = U \frac{df}{d\eta}$ بدست می آوریم:

$$\frac{\delta^*}{\delta} = \frac{1}{5} \int_0^{\eta_{\max}} \left(1 - \frac{df}{d\eta}\right) d\eta$$

با انتگرال گیری خواهیم داشت:

$$\frac{\delta^*}{\delta} = \frac{1}{5} [\eta - f(\eta)]_0^{\eta_{\max}}$$

با محاسبه برای $\eta_{\max} = 5$ خواهیم داشت:

$$\frac{\delta^*}{\delta} = \frac{1}{5} (5.0 - 3.2833) = 0.343$$

$$\leftarrow \frac{\delta^*}{\delta}(\eta=5)$$

مقدار $\eta - f(\eta)$ برای $\eta > 7$ یک مقدار ثابت خواهد شد. محاسبه برای $\eta_{\max} = 8$ می دهد

$$\frac{\delta^*}{\delta} = \frac{1}{5} (8.0 - 6.2792) = 0.344$$

$$\leftarrow \frac{\delta^*}{\delta}(\eta \rightarrow \infty)$$

بنابراین $\delta_{\eta}^* \rightarrow \infty$ می شود 0.24 درصد بزرگتر از $\delta_{\eta}^* = 5$. از معادله $v = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu U}{x}} \left[\eta \frac{df}{d\eta} - f \right]$ داریم:

$$\frac{v}{U} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu}{Ux}} \left(\eta \frac{df}{d\eta} - f \right) = \frac{1}{2\sqrt{\text{Re}_x}} \left(\eta \frac{df}{d\eta} - f \right)$$

با محاسبه در لبه لایه مرزی ($\eta = 5$) بدست می آوریم:

$$\frac{v}{U} = \frac{1}{2\sqrt{\text{Re}_x}} [5(0.9915) - 3.2833] = \frac{0.837}{\sqrt{\text{Re}_x}} \approx \frac{0.84}{\sqrt{\text{Re}_x}}$$

$$\leftarrow \frac{u}{u(\eta=5)}$$

بنابراین v تنها 0.85 درصد U در $\text{Re}_x = 10^4$ است.

و فقط حدود 0.12 درصد U در $\text{Re}_x = 5 \times 10^5$ است.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v}{u} = \frac{v}{U} = \frac{0.84}{\sqrt{\text{Re}_x}}$$

شیب لبه لایه مرزی از معادله زیر بدست می آید:

$$\frac{d\delta}{dx} = 5\sqrt{\frac{v}{U}} \frac{1}{2} x^{-1/2} = 2.5\sqrt{\frac{v}{Ux}} = \frac{2.5}{\sqrt{\text{Re}_x}} \quad \text{بنابراین} \quad \delta \approx \frac{5}{\sqrt{U/vx}} = 5\sqrt{\frac{vx}{U}}$$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right) = \frac{0.84}{2.5} \frac{d\delta}{dx} = 0.336 \frac{d\delta}{dx} \quad \text{پس:}$$

خط جریان

←

این نتیجه نشان می دهد که خطوط جریان، لبه لایه مرزی را به داخل نفوذ می دهند. همانطور که در شکل نشان داده شده است



{ این مسئله کاربرد نتایج حل عددی لایه مرزی ورقه ای روی یک صفحه صاف را تشریح می نماید. }

معادله انتگرالی مومنتم

حل دقیق بلاسیوس رابطه ای برای ضخامت لایه مرزی، $\delta(x)$ ، و تنش برشی بدنه، $\tau_w(x)$ ، ایجاد نمود. مشخص شد که پروفیل های سرعت وقتی به صورت بدون بعد به صورت u/U در مقابل y/δ رسم شوند، مشابه می باشند. راه حل *closed-form* برای پیدا کردن پروفیل سرعت وجود نداشت و راه حل عددی مورد نیاز بود.

روشهای تقریبی برای بدست آوردن راه حل *closed-form* برای جریان لایه مرزی ورقه ای روی یک صفحه صاف مورد استفاده قرار می گیرد.

روشهای تقریبی مشابه ای ممکن است برای حل چگونگی گسترش لایه مرزی درهم (توربولنت) مورد استفاده قرار گیرد. از آنجایی که راه حل های دقیق برای لایه های مرزی درهم وجود ندارد، راه حل تقریبی

برای این حالت گریز ناپذیر است. در این بخش ما باید به یک آنالیز که ما را قادر به بدست آوردن تقریب نزدیکی از ضخامت لایه مرزی ورقه ای یا درهم به صورت تابعی از مسافت در طول یک صفحه می نماید، دست یابیم. ما باید دوباره معادلات انتگرالی را برای حجم کنترل به کار ببریم. هدف ما بدست آوردن معادله ای است که ما را قادر به پیش بینی تقریبی چگونگی رشد لایه مرزی به صورت تابعی از مسافت در طول سطح بنماید. ما باید رابطه ای که بتواند برای جریان ورقه ای و درهم کاربرد داشته باشد استخراج نمائیم و رابطه نباید محدود به جریانهای باگرادیان فشار صفر باشد.

یک جریان غیر قابل تراکم، ماندگار، دو بعدی روی یک سطح جامد فرض نمائید. ضخامت لایه مرزی، δ ، با افزایش فاصله، x رشد می نماید.

برای تحلیل جریان، ما می توانیم یک حجم کنترل دیفرانسیلی با طول dx ، پهنای w ، و ارتفاع $\delta(x)$ انتخاب نمائیم، همانطور که در شکل نشان داده شده است.

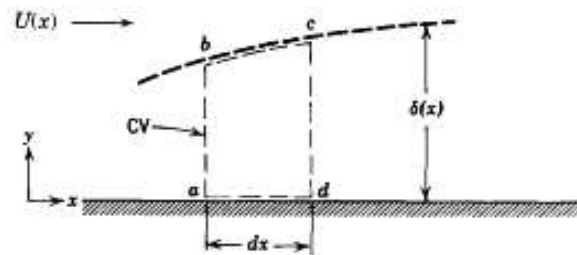


Fig. 9.4 Differential control volume in a boundary layer.

هدف ما تعیین ضخامت لایه مرزی، δ ، برحسب x می باشد. جریان جرمی در سطوح ab و cd از حجم کنترل دیفرانسیلی $abcd$ وجود خواهد داشت. در سطح bc چه؟ آیا جریان جرمی در روی این سطح خواهیم داشت؟ مطابق آنچه که اخیراً در مورد لایه های مرزی مورد بحث قرار دادیم و در مثال ۹/۲ دریافتیم که لبه بالایی لایه مرزی یک خط جریان نیست، لذا جریان جرمی در سطح bc وجود خواهد داشت. از آنجایی که سطح کنترل ad بر یک مرز سخت منطبق است، جریانی از ad وجود نخواهد داشت. قبل از بررسی نیروهای وارده بر حجم کنترل و مقدار مومنتم عبوری از سطح کنترل، اجازه دهید معادله پیوستگی را برای تعیین جریان جرمی از میان هر جزء از سطح کنترل به کار ببریم.

الف. معادله پیوستگی

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} \rho dV + \int_{cs} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \quad \left. \vphantom{\int_{cv}} \right\} \text{معادله اساسی:}$$

مفروضات (۱) جریان ماندگار

(۲) جریان دوبعدی

$$0 = \int_{cs} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = \dot{m}_{ab} + \dot{m}_{bc} + \dot{m}_{cd} \quad \text{پس:}$$

$$\dot{m}_{bc} = -\dot{m}_{ab} - \dot{m}_{cd} \quad \text{یا}$$

حال، اجزاء معادله را برای حجم کنترل دیفرانسیلی با پهنای w بدست می آوریم

جریان جرمی	سطح
جریان جرمی از ab برابر است با:	سطح ab در x واقع شده. از آنجایی که جریان دو بعدی است (تغییرات در جهت z وجود ندارد)،

$$\dot{m}_{ab} = - \left\{ \int_0^{\delta} \rho u dy \right\} w$$

سطح cd در $x + dx$ واقع شده است. با بسط m پیرامون منطقه x توسط سری تیلور، بدست می آوریم:

$$\dot{m}_{x+dx} = \dot{m}_x + \left. \frac{\partial \dot{m}}{\partial x} \right|_x dx$$

و از این رو:

$$\dot{m}_{cd} = \left\{ \int_0^{\delta} \rho u dy + \frac{\partial}{\partial x} \left[\int_0^{\delta} \rho u dy \right] dx \right\} w$$

بنابراین برای سطح bc به دست می آوریم:

$$\dot{m}_{bc} = - \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[\int_0^{\delta} \rho u dy \right] dx \right\} w$$

حال اجازه دهید مقادیر مومنتم و نیروهای ناشی از آن را در حجم کنترل $abcd$ مورد بررسی قرار دهیم.

ب: معادله مومنتم

با کاربرد مولفه x معادله مومنتم برای حجم کنترل $abcd$:

$$F_{sx} + F_{Bx} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{c.v} u \rho dV + \int_{c.s} u \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \quad \text{معادله اساسی:}$$

\uparrow \downarrow \uparrow \downarrow
 نیروهای وزنی \quad نیروهای سطحی

$$F_{Bx} = 0 \quad \text{فرض (۳)}$$

$$F_{sx} = mf_{ab} + mf_{bc} + mf_{cd} \quad \text{پس:}$$

که در آن mf بیانگر مولفه X مقدار مومنتم است. جهت کاربرد این معادله برای حجم کنترل دیفرانسیلی $abcd$ ، ما باید روابطی برای مقدار مومنتم x عبوری از میان سطح کنترل و همچنین نیروهای سطحی وارده بر حجم کنترل در جهت x به دست آوریم. حال می توانیم مقدار مومنتم را بدست آورده و سپس هر جزء از سطح کنترل را مورد رسیدگی قرار دهیم.

سطح	مقدار مومنتم (mf)
-----	-----------------------

ab سطح ab در موقعیت x واقع شده است. از آنجائیکه جریان دو بعدی است، شار مومنتم در جهت x از سطح ab برابر است با:

$$mf_{ab} = - \left\{ \int_0^\delta u \rho u dy \right\} w$$

cd سطح cd در موقعیت $x + dx$ واقع شده است. با بسط شار مومنتم در جهت x (mf) توسط سری های تیلور پیرامون موقعیت x ، به دست می آوریم:

$$mf_{x+dx} = mf_x + \left. \frac{\partial mf}{\partial x} \right]_x dx$$

یا

$$mf_{cd} = \left\{ \int_0^\delta u \rho u dy + \frac{\partial}{\partial x} \left[\int_0^\delta u \rho u y dy \right] dx \right\} w$$

bc از آنجایی که جرم عبوری از سطح bc دارای مولفه سرعت U در جهت x می باشد. شار مومنتم در جهت x که از سطح bc عبور می کند با رابطه زیر بیان می شود:

$$mf_{bc} = U \dot{m}_{bc}$$

$$mf_{bc} = -U \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[\int_0^\delta \rho u dy \right] dx \right\} w$$

از روابط بالا می توانیم مقدار خالص شار مومنتم در جهت x که از سطح کنترل عبور می کند به صورت زیر به دست آوریم:

$$\int_{cs} u \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = - \left\{ \int_0^\delta u \rho u dy \right\} w + \left\{ \int_0^\delta u \rho u dy \right\} w + \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[\int_0^\delta u \rho u y dy \right] dx \right\} w - U \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[\int_0^\delta \rho u dy \right] dx \right\} w$$

با جمع نمودن اجزاء معادله خواهیم داشت:

$$\int_{cs} u\rho\vec{V}.d\vec{A} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[\int_0^\delta u\rho u dy \right] dx - U \frac{\partial}{\partial x} \left[\int_0^\delta \rho u dy \right] dx \right\} w$$

حال که رابطه مناسبی برای بیان شار مومنتم عبوری از سطح کنترل در جهت x در دست داریم، می‌توانیم نیروهای سطحی وارده روی حجم کنترل در جهت x را مورد بررسی قرار دهیم. (حجم کنترل دیفرانسیلی مورد نظر مجدداً در شکل زیر نشان داده شده است). می‌دانیم که نیروهای عمودی بر سه سطح از سطح کنترل اثر می‌کنند. علاوه بر آن، نیروهای برشی بر سطح ad اثر می‌نمایند. از آنجائیکه گرادیان سرعت در لبه بالایی مرزی به سمت صفر میل می‌نماید، از مقدار نیروی برشی وارده در طول سطح bc صرف‌نظر شده است.

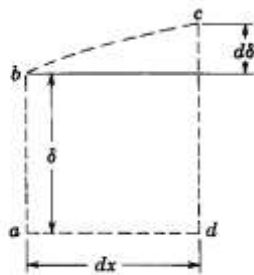


Fig. 9.5 Differential control volume.

نیرو	سطح
<p>اگر فشار در x برابر P باشد، در نتیجه مقدار نیروی وارده بر سطح ab با رابطه زیر بیان می‌شود:</p> $F_{ab} = Pw\delta$ <p>(لایه مرزی بسیار نازک است؛ در تمام شکلهایی که این لایه نشان داده شده ضخامت آن به مقدار زیادی بزرگ نشان داده شده است. چون این لایه بسیار نازک می‌باشد، لذا از تغییرات فشار در جهت y می‌توان صرف‌نظر نمود، و لذا فرض نمودیم که در لایه مرزی: $p = p(x)$)</p>	ab
<p>با بسط رابطه با سریهای تیلور، مقدار فشار در $x + dx$ بوسیله رابطه زیر بیان می‌شود:</p> $p_{x+dx} = p + \left. \frac{dp}{dx} \right _x dx$ <p>پس مقدار نیروی روی سطح cd با رابطه زیر بیان خواهد شد:</p>	cd

$$F_{cd} = -\left(p + \frac{dp}{dx}\right)_x dx w(\delta + d\delta)$$

مقدار متوسط فشار وارده روی سطح bc برابر خواهد بود با: bc

$$p + \frac{1}{2} \frac{dp}{dx} \Big|_x dx$$

پس مولفه x نیروی عمودی وارده روی bc بوسیله رابطه زیر به دست می آید

$$F_{bc} = \left(p + \frac{1}{2} \frac{dp}{dx}\right)_x dx w d\delta$$

نیروی برشی وارده بر ad با رابطه زیر به دست می آید: ad

$$F_{ad} = -\left(\tau_w + \frac{1}{2} d\tau_w\right) w dx$$

با جمع نمودن مولفه x همه نیروهای وارده بر حجم کنترل، به دست می آوریم:

$$F_{SX} = \left\{ -\frac{dp}{dx} \delta dx - \frac{1}{2} \frac{dp}{dx} dx d\delta - \tau_w dx - \frac{1}{2} d\tau_w dx \right\} w$$

با توجه به اینکه می دانیم $dxd\delta \ll \delta dx$ و $d\tau_w \ll \tau_w$ است، لذا از اجزاء دوم و چهارم معادله صرفنظر نمودیم.

با جایگزینی روابط به دست آمده برای $\int_{cs} u \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$ و F_{SX} در معادله مومنتم در جهت x ، به دست می آوریم:

$$\left\{ -\frac{dp}{dx} \delta dx - \tau_w dx \right\} w = \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[\int_0^\delta u \rho u dy \right] dx - U \frac{\partial}{\partial x} \left[\int_0^\delta \rho u dy \right] dx \right\} w$$

با تقسیم رابطه فوق بر $w dx$ خواهیم داشت:

$$-\delta \frac{dp}{dx} - \tau_w = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\delta u \rho u dy - U \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\delta \rho u dy$$

معادله فوق معادله «انتگرالی مومنتم» می باشد که رابطه بین مولفه های x نیروهای وارده در لایه مرزی و شار مومنتم در جهت x را ارائه می کند.

گرادیان فشار ، $\frac{dp}{dx}$ ، بیرون از لایه مرزی می تواند با بکارگیری معادله برنولی برای جریان بدون لزوجت تعیین گردد.

اگر بپذیریم که $\delta = \int_0^\delta dy$ پس معادله «انتگرالی مومنتم» می تواند به شکل زیر نوشته شود:

$$\tau_w = -\frac{\partial}{\partial x} \int_0^\delta u \rho u dy + U \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\delta \rho u dy + \frac{dU}{dx} \int_0^\delta \rho U dy$$

از آنجایی که:

$$U \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\delta \rho u dy = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\delta \rho u U dy - \frac{dU}{dx} \int_0^\delta \rho u dy$$

پس :

$$\tau_w = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\delta \rho u (U - u) dy + \frac{dU}{dx} \int_0^\delta \rho (U - u) dy$$

و

$$\tau_w = \frac{\partial}{\partial x} U^2 \int_0^\delta \rho \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy + U \frac{dU}{dx} \int_0^\delta \rho \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy$$

با بکار گیری تعریف ضخامت جابجایی ، δ^* ، و ضخامت مومنتم ، θ ، خواهیم داشت:

$$\frac{\tau_w}{\rho} = \frac{d}{dx} (U^2 \theta) + \delta^* U \frac{dU}{dx}$$

معادله فوق معادله «انتگرالی مومنتم» می باشد.

در صورتی که شکل مناسبی برای پروفیل سرعت فرض شود و تنش برشی دیواره بتواند با سایر متغیرها مرتبط گردد، این معادله می تواند برای ضخامت لایه مرزی یک معادله دیفرانسیلی معمولی نتیجه دهد.

وقتی که ضخامت لایه مرزی تعیین شود، ضخامت مومنتم ، ضخامت جابجایی و تنش برشی دیواره می توانند محاسبه شوند.

معادله فوق با بکارگیری معادلات اساسی (پیوستگی و مومنتم در جهت x) در یک حجم کنترل دیفرانسیلی بدست آمده است با بازنگری در مفروضات بکار گرفته شده در استخراج معادله ، ملاحظه

خواهیم کرد که معادله محدود به جریان ماندگار، غیر قابل تراکم، دوبعدی و عدم وجود نیروهای درونی می باشد.

ما هیچ فرضی برای مرتبط کردن تنش برشی دیواره، τ_w ، به میدان سرعت در نظر نگرفتیم. بنابراین معادله فوق برای جریان لایه مرزی ورقه ای یا درهم معتبر و قابل استفاده می باشد. برای استفاده از این معادله جهت محاسبه ضخامت لایه مرزی بر حسب تابع x ، باید:

۱- یک تقریب اولیه برای توزیع سرعت جریان آزاد، $U(x)$ به دست آوریم. این مقدار از تئوری جریان بدون لزوجت تعیین می شود (سرعتی که در صورت عدم وجود لایه مرزی وجود می داشت). فشار در لایه مرزی را با بکارگیری معادله برنولی به سرعت جریان آزاد، $U(x)$ ، مرتبط نمائید.

۲- یک شکل پروفیل سرعت مناسب برای ناحیه درون لایه مرزی فرض نمائید.

۳- تنش برشی دیواره را به میدان سرعت مرتبط نمائید.

برای توضیح کاربرد معادله فوق برای جریانهای لایه مرزی، ابتدا جریان روی یک صفحه صاف با گرادیان فشار صفر را مورد بررسی قرار می دهیم و در بخش بعدی اثرات گرادیان فشار روی جریان لایه مرزی مورد بحث قرار خواهد گرفت.

بکارگیری معادله انتگرالی مومنتم برای جریان با گرادیان فشار صفر

برای حالت ویژه جریان روی یک صفحه صاف، ثابت U ، از معادله برنولی خواهیم یافت که برای این

$$\text{حالت، ثابت } p \text{ و بنابراین } \frac{dp}{dx} = 0$$

پس معادله انتگرالی مومنتم به شکل زیر کاهش می یابد:

$$\tau_w = \rho U^2 \frac{d\theta}{dx} = \rho U^2 \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy$$

توزیع سرعت، $\frac{u}{U}$ ، در لایه مرزی معمولاً بصورت تابعی از $\frac{y}{\delta}$ ، بیان می شود. (قابل توجه اینکه، $\frac{u}{U}$

بدون بعد می باشد و δ تنها تابعی از x می باشد.) بهمین ترتیب مناسب است که متغیر انتگرال از y به $\frac{y}{\delta}$

تغییر نماید. با تعریف

$$\eta = \frac{y}{\delta}$$

$$dy = \delta d\eta$$

پس:

و معادله انتگرالی مومنتم برای گرادیان فشار صفر بصورت زیر نوشته می شود:

$$\tau_w = \rho U^2 \frac{d\theta}{dx} = \rho U^2 \frac{d\delta}{dx} \int_0^1 \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) d\eta$$

ما علاقه مندیم این معادله را برای ضخامت لایه مرزی بصورت تابعی از x حل نمائیم. برای انجام این کار ما باید:

۱- توزیع سرعت در لایه مرزی را فرض نمائیم. با رابطه ای به شکل:

$$\frac{u}{U} = f\left(\frac{y}{\delta}\right)$$

(الف) توزیع سرعت در نظر گرفته شده، باید شرایط مرزی فیزیکی زیر را داشته باشد.

$$\begin{aligned} u=0 & , & y=0 & \text{ در} \\ u=U & , & y=\delta & \text{ در} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = 0 & , & y=\delta & \text{ در} \end{aligned}$$

(ب) قابل توجه اینکه زمانی که توزیع سرعت در نظر گرفته شد مقدار عددی انتگرال در معادله فوق به شکل زیر ساده می شود.

$$\int_0^1 \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) d\eta = \frac{\theta}{\delta} = \text{ثابت} = \beta$$

و معادله انتگرالی مومنتم می شود:

$$\tau_w = \rho U^2 \frac{d\delta}{dx} \beta$$

۲- رابطه ای برای τ_w برحسب δ بدست آورید. این رابطه به ما این امکان را می دهد که رابطه برای $\delta(x)$ حل شود، همانطور که در زیر شرح داده شده است.

جریان ورقه ای

برای جریان ورقه ای روی یک صفحه صاف، یک فرض قابل قبول برای پروفیل سرعت یک معادله پولینومیال برحسب y است.

$$u = a + by + cy^2$$

شرایط مرزی فیزیکی بقرار زیر هستند.

$$\begin{aligned} u = 0 & \quad , \quad y = 0 \quad \text{در} \\ u = U & \quad , \quad y = \delta \quad \text{در} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = 0 & \quad , \quad y = \delta \quad \text{در} \end{aligned}$$

با محاسبه ضرایب ثابت a, b, c (با توجه به شرایط مرزی) خواهیم داشت:

$$\frac{u}{U} = 2\left(\frac{y}{\delta}\right) - \left(\frac{y}{\delta}\right)^2 = 2\eta - \eta^2$$

تنش برشی دیواره بوسیله رابطه زیر بیان می شود:

$$\tau_w = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0}$$

با جایگزینی پروفیل سرعت فرضی در این رابطه برای τ_w خواهیم داشت:

$$\tau_w = \mu \left. \frac{du}{dy} \right|_{y=0} = \mu \left. \frac{U \delta \left(\frac{u}{U} \right)}{\delta \delta \left(\frac{y}{\delta} \right)} \right|_{\frac{y}{\delta}=0} = \left. \frac{\mu U}{\delta} \frac{d\left(\frac{u}{U}\right)}{d\eta} \right|_{\eta=0}$$

یا

$$\tau_w = \frac{\mu U}{\delta} \left. \frac{d}{d\eta} (2\eta - \eta^2) \right|_{\eta=0} = \frac{\mu U}{\delta} (2 - 2\eta) \Big|_{\eta=0} = \frac{2\mu U}{\delta}$$

حال در مرحله ای هستیم که معادله انتگرالی مومنتم را بکار ببریم.

$$\tau_w = \rho U^2 \frac{d\delta}{dx} \int_0^1 \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) d\eta$$

با جایگزینی مقادیر τ_w و $\frac{u}{U}$ ، خواهیم داشت:

$$\frac{2\mu U}{\delta} = \rho U^2 \frac{d\delta}{dx} \int_0^1 (2\eta - \eta^2)(1 - 2\eta + \eta^2) d\eta$$

یا

$$\frac{2\mu U}{\delta \rho U^2} = \frac{d\delta}{dx} \int_0^1 (2\eta - 5\eta^2 + 4\eta^3 - \eta^4) d\eta$$

با انتگرال گیری و جایگزینی حدود انتگرال خواهیم داشت:

$$\frac{2\mu}{\delta\rho U} = \frac{2}{15} \frac{d\delta}{dx}$$

یا

$$\delta d\delta = \frac{15\mu}{\rho U} dx$$

که نشان دهنده معادله دیفرانسیلی برای δ است. با انتگرال گیری مجدد خواهیم داشت:

$$\frac{\delta^2}{2} = \frac{15\mu}{\rho U} x + c$$

اگر فرض شود که در $x=0$ ، $\delta=0$ است، پس باید $c=0$ باشد، بنابراین:

$$\delta = \sqrt{\frac{30\mu x}{\rho U}}$$

یا

$$\frac{\delta}{x} = \sqrt{\frac{30\mu}{\rho U x}} = \frac{5.48}{\sqrt{R_{ex}}}$$

معادله فوق نشان می دهد که نسبت ضخامت لایه مرزی ورقه ای به فاصله در طول یک صفحه صاف رابطه معکوس با جذر عدد رینالدز طول دارد. این رابطه مشابه رابطه ای است که از طریق راه حل دقیق با استفاده از معادلات دیفرانسیلی حرکت توسط بلاسیوس در سال ۱۹۰۸ استخراج گردید. قابل ملاحظه است که معادله فوق در مقایسه با راه حل دقیق تنها حدود ۱۰ درصد خطا دارد. (عدد ثابت بزرگتر است). جدول زیر نتایج محاسبات با بکارگیری پروفیل سرعت تقریبی و نتایج مشابه بدست آمده از راه حل دقیق را خلاصه نموده است.

Velocity Distribution					
$\frac{u}{U} = f\left(\frac{y}{\delta}\right) = f(\eta)$	$\frac{\theta}{\delta}$	$\frac{\delta^*}{\delta}$	$H = \frac{\delta^*}{\theta}$	$a = \frac{\delta}{x} \sqrt{Re_x}$	$b = C_f \sqrt{Re_x}$
$f(\eta) = \eta$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	3.00	3.46	0.577
$f(\eta) = 2\eta - \eta^2$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{3}$	2.50	5.48	0.730
$f(\eta) = \frac{3}{2}\eta - \frac{1}{2}\eta^3$	$\frac{39}{280}$	$\frac{3}{8}$	2.69	4.64	0.647
$f(\eta) = 2\eta - 2\eta^3 + \eta^4$	$\frac{37}{315}$	$\frac{3}{10}$	2.55	5.84	0.685
$f(\eta) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\eta\right)$	$\frac{4-\pi}{2\pi}$	$\frac{\pi-2}{\pi}$	2.66	4.80	0.654
Exact	0.133	0.344	2.59	5.0	0.664

وقتی که ضخامت لایه مرزی شناخته شد، همه جزئیات جریان می توانند تعیین شوند. ضریب تنش برشی دیواره یا skin friction بوسیله رابطه زیر تعریف میشود:

$$C_F \equiv \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho U^2}$$

با جایگزینی پروفیل سرعت و معادله $\frac{\delta}{x} = \frac{5.48}{\sqrt{Re_x}}$ خواهیم داشت:

$$C_F = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho U^2} = \frac{2\mu(U/\delta)}{\frac{1}{2}\rho U^2} = \frac{4\mu}{\rho U \delta} = 4 \frac{\mu}{\rho U x} \frac{x}{\delta} = 4 \frac{1}{Re_x} \frac{1}{5.48}$$

نهایتاً:

$$C_F = \frac{0.730}{\sqrt{Re_x}}$$

وقتی که تغییرات τ_w شناخته شد، کشش لزوجت (Viscous drag) روی سطح می تواند با انتگرال گیری روی سطح صفحه صاف محاسبه شود. همانطور که در مثال زیر تشریح شده است.

معادله $\frac{\delta}{x} = \frac{5.48}{\sqrt{Re_x}}$ می تواند برای محاسبه ضخامت لایه مرزی ورقه ای در حال انتقال بکار گرفته شود.

برای شرایط هوای استاندارد در $R = 5 \times 10^5$ ، با $U = 30m/s$ ، $x = 0.24m$ خواهیم داشت:

$$\frac{\delta}{x} = \frac{5.48}{\sqrt{Re_x}} = \frac{5.48}{\sqrt{5 \times 10^5}} = 0.00775$$

و ضخامت لایه مرزی می شود:

$$\delta = 0.00775x = 0.00775(0.24m) = 1.86mm$$

ضخامت لایه مرزی در حال انتقال کمتر از ۱ درصد طول فاصله، x است. این محاسبات نشان می دهد که اثرات لزوجت محدود به یک لایه بسیار نازک نزدیک سطح یک جسم می باشد. نتایج در جدول فوق نشان دهنده اینست که با در نظر گرفتن پروفیل های سرعت فرضی متفاوت نتایج نسبتاً قابل قبولی بدست می آید. مثال : یک لایه مرزی دو بعدی ورقه ای در طول یک صفحه صاف در نظر بگیرید. فرض کنید پروفیل سرعت در لایه مرزی بصورت سینوسی بشکل زیر است.

$$\frac{u}{U} = \sin\left(\frac{\pi y}{2\delta}\right)$$

رابطه ای برای مقادیر زیر پیدا کنید

الف) مقدار رشد δ برحسب تابعی از x

ب) ضخامت جابجایی، δ^* ، بصورت تابعی از x

ج) کل نیروی اصطکاکی روی صفحه ای با طول L و پهنای b .

داده ها: جریان لایه مرزی دو بعدی ورقه ای در طول یک صفحه صاف.

پروفیل سرعت لایه مرزی بشکل زیر:

$$\frac{u}{U} = \sin\left(\frac{\pi y}{2\delta}\right) \quad \text{برای} \quad 0 \leq y \leq \delta$$

و

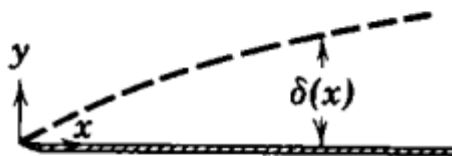
$$\frac{u}{U} = 1 \quad \text{برای} \quad y > \delta$$

خواسته ها:

الف) $\delta(x)$

ب) $\delta^*(x)$

ج) کل نیروی اصطکاکی روی صفحه ای به طول L و پهنای b



راه حل : برای جریان روی صفحه صاف ، ثابت U ، $\frac{dp}{dx} = 0$ ، و

$$\tau_w = \rho U^2 \frac{d\theta}{dx} = \rho U^2 \frac{d\delta}{dx} \int_0^1 \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) d\eta$$

مفروضات :

۱- جریان ماندگار

۲- جریان غیر قابل تراکم

با جایگزینی $\frac{u}{U} = \sin \frac{\pi}{2} \eta$ در معادله فوق بدست می آوریم

$$\tau_w = \rho U^2 \frac{d\delta}{dx} \int_0^1 \sin \frac{\pi}{2} \eta \left(1 - \sin \frac{\pi}{2} \eta\right) d\eta = \rho U^2 \frac{d\delta}{dx} \int_0^1 \left(\sin \frac{\pi}{2} \eta - \sin^2 \frac{\pi}{2} \eta\right) d\eta$$

$$= \rho U^2 \frac{d\delta}{dx} \frac{2}{\pi} \left[-\cos \frac{\pi}{2} \eta - \frac{1}{2} \frac{\pi}{2} \eta + \frac{1}{4} \sin \pi \eta \right]_0^1 = \rho U^2 \frac{d\delta}{dx} \frac{2}{\pi} \left[0 + 1 - \frac{\pi}{4} + 0 + 0 - 0 \right]$$

$$\tau_w = 0.137 \rho U^2 \frac{d\delta}{dx} = \beta \rho U^2 \frac{d\delta}{dx} , \beta = 0.137$$

حال

$$\tau_w = \mu \left. \frac{du}{dy} \right|_{y=0} = \mu \frac{U}{\delta} \left. \frac{\partial \left(\frac{u}{U}\right)}{\partial \left(\frac{y}{\delta}\right)} \right|_{y=0} = \mu \frac{U}{\delta} \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} \eta \Big|_{\eta=0} = \frac{\pi \mu U}{2\delta}$$

$$\tau_w = \frac{\pi\mu U}{2\delta} = 0.137 \rho U^2 \frac{d\delta}{dx} \quad \text{بنابراین:}$$

با جدا سازی متغیرها خواهیم داشت:

$$\delta d\delta = 11.5 \frac{\mu}{\rho U} dx$$

با انتگرال گیری بدست می آوریم:

$$\frac{\delta^2}{2} = 11.5 \frac{\mu}{\rho U} x + c$$

اما از آنجائیکه در $x=0$, $\delta=0$ است خواهیم داشت $c=0$ پس:

$$\delta = \sqrt{23.0 \frac{x\mu}{\rho U}}$$

یا

$$\frac{\delta}{x} = 4.80 \sqrt{\frac{\mu}{\rho U x}} = \frac{4.8}{\sqrt{R_{ex}}}$$

← $\delta(x)$

ضخامت جابجایی، δ^* بوسیله رابطه زیر داده می شود:

$$\delta^* = \delta \int_0^1 \left(1 - \frac{u}{U}\right) d\eta = \delta \int_0^1 \left(1 - \sin \frac{\pi}{2} \eta\right) d\eta = \delta \left[\eta + \frac{2}{\pi} \cos \frac{\pi}{2} \eta \right]_0^1$$

$$\delta^* = \delta \left[1 - 0 + 0 - \frac{2}{\pi} \right] = \delta \left[1 - \frac{2}{\pi} \right]$$

از آنجائیکه از قسمت (الف) داریم:

$$\frac{\delta}{x} = \frac{4.8}{\sqrt{R_{ex}}}$$

پس

$$\frac{\delta^*}{x} = \left(1 - \frac{2}{\pi}\right) \frac{4.8}{\sqrt{R_{ex}}} = \frac{1.74}{\sqrt{R_{ex}}}$$

← $\delta^*(x)$

کل نیروی اصطکاکی روی یک طرف صفحه با رابطه زیر بدست می آید

$$F = \int_{AP} \tau_w dA$$

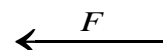
از آنجایی که $dA = bdx$ و $0 < x \leq L$ ،

$$F = \int_0^L \tau_w b dx = \int_0^L \rho U^2 \frac{d\theta}{dx} b dx = \rho U^2 b \int_0^{\theta_L} d\theta = \rho U^2 b \theta_L$$

$$\theta_L = \int_0^{\delta_L} \frac{u}{v} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy = \delta_L \int_0^1 \frac{u}{v} \left(1 - \frac{u}{U}\right) d\eta = \beta \delta_L$$

از قسمت (الف) داریم $\beta = 0.137$ و $\delta_L = \frac{4.80L}{\sqrt{Re_L}}$ ، بنابراین:

$$F = \frac{0.658 \rho U^2 b L}{\sqrt{Re_L}}$$



{ این مسئله، کاربرد معادله انتگرال مومنتم برای جریان لایه مرزی ورقه ای روی یک صفحه را شرح می دهد. }

جریان درهم (Turbulent)

جزئیات پروفیل سرعت آشفته برای لایه های مرزی با گرادیان فشار صفر، بسیار شبیه به جزئیات پروفیل سرعت جریان آشفته درون لوله ها و کانالها است.

ارقام تجربی بدست آمده از لایه های مرزی درهم با بکارگیری دستگاه مختصات $\frac{u}{U}$ در مقابل $\frac{y}{\delta}$ رسم شدند. و بدین ترتیب پروفیل سرعت مناسبی برای لایه های مرزی درهم روی صفحات مسطح صاف بدست آمد. پروفیل تجربی بدست آمده توانی (Power - law)، و توان $\frac{1}{7}$ معمولاً برای مدل پروفیل سرعت بکار می رود .

$$\frac{u}{U} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{\frac{1}{7}} = \eta^{\frac{1}{7}}$$

این پروفیل ناحیه نزدیک دیواره را شامل نمی شود زیرا با استفاده از این معادله در نزدیک دیواره $\frac{du}{dy} = \infty$ بدست می آید. بدین ترتیب ما نمی توانیم از این معادله بمنظور یافتن رابطه ای برای τ_w برحسب δ (همانطور که برای جریان جریان لایه مرزی ورقه ای استفاده کردیم) برای لایه مرزی در هم از رابطه ای که برای جریان در لوله ها بکار برده می شود، با انجام تغییراتی استفاده می کنیم).

$$\tau_w = 0.03325 \rho \bar{V}^2 \left[\frac{v}{R\bar{V}} \right]^{0.25}$$

شعاع لوله

با بکارگیری توان $\frac{1}{7}$ برای پروفیل سرعت در لوله خواهیم داشت $\frac{\bar{V}}{U} = 0.817$ ، با جایگزینی $R = \delta, \bar{V} = 0.817U$ در معادله فوق خواهیم داشت :

$$\tau_w = 0.233 \rho U^2 \left(\frac{v}{U\delta} \right)^{\frac{1}{4}}$$

حال می توانیم معادله انتگرالی مومتم را بکار ببریم :

$$\tau_w = \rho U^2 \frac{d\delta}{dx} \int_0^1 \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U} \right) d\eta$$

با جایگزینی τ_w و $\frac{u}{U}$ و انتگرال گیری بدست می آوریم :

$$0.0233 \left(\frac{u}{v\delta} \right)^{\frac{1}{4}} = \frac{d\delta}{dx} \int_0^1 \eta^{\frac{1}{7}} (1 - \eta^{\frac{1}{7}}) d\eta = \frac{7}{72} \frac{d\delta}{dx}$$

بدین ترتیب یک معادله دیفرانسیلی برای δ بدست آوردیم:

$$\delta^{\frac{1}{4}} d\delta = 0.24 \left(\frac{v}{U} \right)^{\frac{1}{4}} dx$$

با انتگرال گیری خواهیم داشت :

$$\frac{4}{5} \delta^{\frac{5}{4}} = 0.24 \left(\frac{v}{U} \right)^{\frac{1}{4}} x + c$$

اگر فرض شود که در $x=0$ داریم $\delta \cong 0$ (این فرض مساوی اینست که فرض کنیم جریان از ابتدای لبه صفحه حالت درهم دارد)، پس $c=0$ می شود و؛

$$\delta = 0.382 \left(\frac{v}{U} \right)^{\frac{1}{5}} x^{\frac{4}{5}}$$

یا

$$\frac{\delta}{x} = 0.382 \left(\frac{v}{Ux} \right)^{\frac{1}{5}} = \frac{0.382}{R_{ex}^{\frac{1}{5}}}$$

با بکار بردن این معادله، ضریب اصطکاک سطحی بر حسب δ را به شکل زیر بدست می آوریم:

$$C_F = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2} \rho U^2} = 0.0466 \left(\frac{v}{U\delta} \right)^{\frac{1}{4}}$$

باجایگزینی برای δ ، بدست می آوریم:

$$C_F = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2} \rho U^2} = \frac{0.0594}{R_{ex}^{\frac{1}{5}}}$$

تجارب بدست آمده نشان می دهد که معادله فوق، اصطکاک سطحی در هم را روی یک صفحه مسطح برای حدود $10^7 < R_{ex} < 5 \times 10^5$ بسیار خوب محاسبه می نماید.

استفاده از معادله انتگرال مومنتم یک روش تقریبی برای پیش بینی گسترش لایه مرزی می باشد؛ در هر حال این معادله، شکل تغییرات (Trends) را بدرستی پیش بینی می نماید. پارامترهای لایه مرزی ورقه ای با $R_{ex}^{-\frac{1}{2}}$ تغییر می نمایند. همین پارامترها در لایه مرزی در هم با $R_{ex}^{\frac{1}{5}}$ تغییر می نمایند. در نتیجه لایه مرزی در هم با سرعت بیشتری نسبت به لایه مرزی ورقه ای گسترش می یابد.

تنش برشی دیواره در لایه مرزی در هم بسیار بیشتر از لایه مرزی ورقه ای است. این مسئله دلیل اساسی برای گسترش سریع لایه های مرزی در هم است. همخوانی بدست آمده با نتایج تجربی نشان می دهد که استفاده از معادله انتگرال مومنتم یک روش تقریبی موثری است که ما را قادر می سازد تا رفتار عمومی لایه های مرزی را مطالعه نمائیم.

مثال- لایه مرزی درهم روی یک صفحه مسطح : راه حل تقریبی با بکارگیری پروفیل سرعت با توان $\frac{1}{7}$.
 آب با $U=1 \text{ m/s}$ از روی یک صفحه مسطح با $L=1 \text{ m}$ (در جهت صفحه) جریان دارد. لایه مرزی ایجاد شده و فرض می شود در لبه صفحه به درهم تبدیل می شود. ضخامت لایه مرزی، δ^* ، و تنش برشی دیواره در $x=L$ را محاسبه کنید. این ارقام را با حالتی که جریان ورقه ای در همان محل باشد، مقایسه نمائید. برای پروفیل سرعت درهم، توان $\frac{1}{7}$ را فرض نمائید.

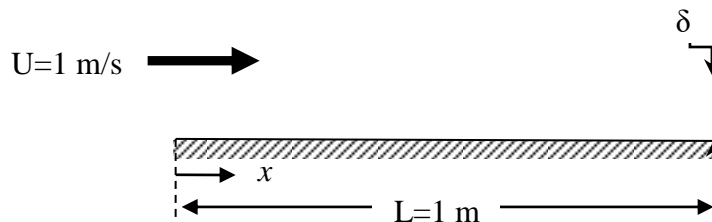
داده ها: جریان لایه مرزی روی یک صفحه مسطح: جریان درهم از لبه صفحه. فرض $\frac{1}{7}$ توان برای پروفیل سرعت .

خواسته ها: (الف) ضخامت لایه مرزی، δ ،

(ب) ضخامت جابجایی ، δ^* ،

(ح) تنش برشی دیواره ، τ_w ،

(د) مقایسه با حالتی که جریان لایه مرزی ورقه ای باشد.



راه حل :

بکارگیری نتایج حاصل از معادله انتگرال مومنتم .

معادلات محاسبه شده :

$$\frac{\delta}{x} = \frac{0.382}{R_{ex}^{1/5}}$$

$$\delta^* = \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy$$

$$C_F = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho U^2} = \frac{0.0594}{R_{ex}^{1/5}}$$

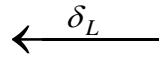
در $x=L$ با داشتن $\nu = 1.00 \times 10^{-6} \text{ m}^2 / \text{s}$ برای آب ،

$$R_{eL} = \frac{UL}{\nu} = 1 \times 1 \times \frac{1}{10^{-6}} = 10^6$$

از معادله $\frac{\delta}{x} = \frac{0.382}{R_{ex}^{\frac{1}{5}}}$ داریم :

$$\delta_L = \frac{0.382}{R_{ex}^{\frac{1}{5}}} L = \frac{0.382}{(10^6)^{\frac{1}{5}}} \times 1 \text{ m} = 0.0241 \text{ m}$$

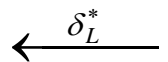
$$\delta_L = 24.1 \text{ mm}$$



با بکارگیری معادله $\delta^* = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy$ با قراردادن $\frac{u}{U} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{\frac{1}{7}} = \eta^{\frac{1}{7}}$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \delta_L^* &= \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy = \delta_L \int_0^{\frac{L}{\delta}} \left(1 - \frac{u}{U}\right) d\left(\frac{y}{\delta}\right) = \delta_L \int_0^1 (1 - \eta^{\frac{1}{7}}) d\eta \\ &= \delta_L \left[\eta - \frac{7}{8} \eta^{\frac{8}{7}} \right]_0^1 \end{aligned}$$

$$\delta_L^* = \frac{\delta_L}{\gamma} = \frac{24.1 \text{ mm}}{8} = 3.01 \text{ mm}$$



از معادله $C_F = \frac{0.0594}{R_{ex}^{\frac{1}{5}}}$ داریم :

$$c_F = \frac{0.0594}{(10^6)^{\frac{1}{5}}} = 0.00375$$

$$\tau_w = c_F \frac{1}{2} \rho U^2 = 0.00375 \times \frac{1}{2} \times 999 \times (1)^2$$

$$\tau_w = 1.87 \text{ N / m}^2$$

$$\leftarrow \tau_w(L)$$

برای جریان ورقه ای با بکارگیری مقادیر راه حل بلاسیوس داریم

$$\delta_L = \frac{5.0}{\sqrt{Re_x}} = \frac{5.0}{(10^6)^{\frac{1}{2}}} \times 1 = 0.005 \text{ m}$$

یا 5.00 mm ،

از مثالهای قبل داریم $\frac{\delta^*}{\delta} = 0.344$ ، بنابراین :

$$\delta^* = 0.344 \delta = 0.344 \times 5.0 = 1.72 \text{ mm}$$

از معادله $c_f = \frac{0.664}{\sqrt{Re_x}}$ ، داریم :

$$\tau_w = c_f \frac{1}{2} \rho U^2 = \frac{0.662}{\sqrt{10^6}} \times \frac{1}{2} \times 999 \times (1)^2 = 0.332 \text{ N/m}^2$$

$$\text{ضخامت ناحیه مغشوش} \quad \frac{\delta_{\text{درهم ورقه ای}}}{\delta} = \frac{24.1 \text{ mm}}{5.00} = 4.82$$

$$\text{ضخامت جابجایی} \quad \frac{\delta^*_{\text{درهم ورقه ای}}}{\delta} = \frac{3.01 \text{ mm}}{1.72 \text{ mm}} = 1.75$$

$$\text{تنش برشی دیواره} \quad \frac{\tau_w_{\text{درهم ورقه ای}}}{\tau_w} = \frac{1.87}{0.332} = 5.63$$

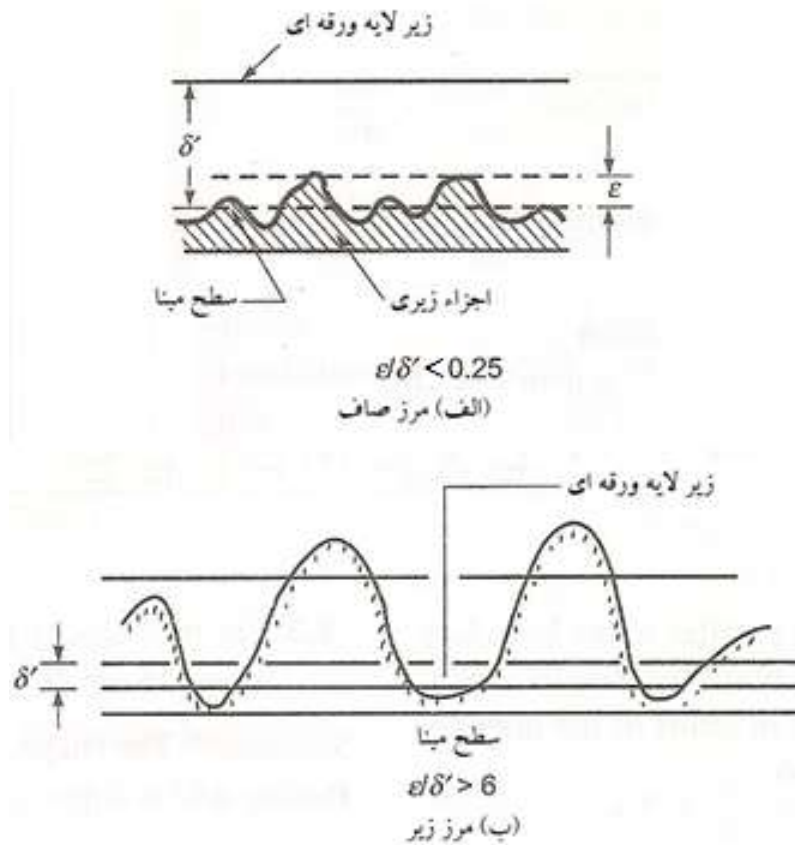
زیر لایه ی ورقه ای

زیر لایه ی ورقه ای معمولاً بسیار نازک است و ضخامت آن δ' می تواند با رابطه ی تجربی زیر محاسبه شود

$$\delta' = 11.6 \nu / u_*$$

که در آن $u_* = \sqrt{\tau_0 / \rho}$ = سرعت برشی

اگر مقدار زبری های سطح ε در مقایسه با δ' بسیار کوچک باشند؛ یعنی $\varepsilon \ll \delta'$ ، در آن صورت چنین سطحی از نظر هیدرودینامیکی صاف گفته می شود. در چنین جریانی زبری ها اثر محسوسی ندارند و اثرات لزوجت نقش اساسی در جریان ایفا می کند. معمولاً معیار $\varepsilon / \delta' < 0.25$ به عنوان مشخصه ی سطوح هیدرودینامیکی صاف در نظر گرفته می شود



شکل: تعریف سطوح صاف و زبر از نظر هیدرودینامیکی

اگر ضخامت زیر لایه‌ی ورقه‌ای δ' در مقایسه با ارتفاع زبری‌ها ε ، خیلی کوچک باشد (یعنی $\delta' \gg \varepsilon$)، در چنین جریان‌هایی لزوجت نقش اساسی ایفا نمی‌کند و مرزها از نظر هیدرودینامیکی زبر خوانده می‌شوند. معمولاً $\delta' > 6\varepsilon$ به عنوان معیاری برای جداره‌های هیدرودینامیکی زبر در نظر گرفته می‌شود.

در محدوده‌ی $0.25 < \delta' / \varepsilon < 6$ ، مرزها در رژیم انتقالی به سر می‌برند و لزوجت و زبری‌ها هر دو جریان را کنترل می‌کنند.

گرادیانهای فشار در جریان لایه مرزی

تحلیل ما در مورد جریانهای لایه مرزی تاکنون برای جریانهایی روی صفحه مسطح که در آنها گرادیان فشار صفر بود، بوده است.

معادله انتگرالی مومنتم برای این حالت بصورت زیر داده شده است،

$$\tau_w = \rho U^2 \frac{d\theta}{dx} = \rho U^2 \frac{d}{dx} \int_0^\delta \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy$$

با یادآوری اینکه در استخراج این معادله، هیچ فرضی در مورد رژیم جریان لایه مرزی در نظر گرفته نشد، معادله برای هر دو لایه مرزی ورقه ای و درهم معتبر می باشد. معادله فوق نشان می دهد که تنش برشی دیواره، بوسیله کاهش در مومنتم سیال به حال تعادل در می آید. در نتیجه پروفیل های سرعت با حرکت در طول صفحه تغییر می نمایند. ضخامت لایه مرزی به افزایش خود ادامه می دهد و جریان نزدیک دیواره، رفته رفته آهسته می شود (از دست دادن مومنتم).

سئوالی که می توان کرد این است که آیا سیال نزدیک دیواره امکان دارد متوقف شود؟ به بیانی دیگر،

$$\text{سئوال این است که برای حالتی که } \frac{dp}{dx} = 0 \text{ است، آیا احتمال دارد } \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = 0 \text{ باشد؟}$$

با در نظر گرفتن توزیعهای تنش برشی دیواره برای صفحات مسطح، در می یابیم که برای جریان ورقه ای،

$$\frac{\tau_w(x)}{\rho U^2} = \frac{\text{ثابت}}{\sqrt{R_{ex}}}$$

و برای جریان درهم،

$$\frac{\tau_w(x)}{\rho U^2} = \frac{\text{ثابت}}{R_{ex}^{\frac{1}{5}}}$$

با یادآوری اینکه $\tau_w = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0}$ ، ما می توانیم بگوئیم برای صفحه با طول محدود، $\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0}$ هرگز صفر نخواهد شد.

نقطه ای روی مرزهای سخت که در آن $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ است، نقطه جدایش تعریف شده است. به همین ترتیب بطور خلاصه برای $\frac{\partial P}{\partial x} = 0$ جریان جدا خواهد شد؛ یا لایه سیال در کنار سطح جامد هرگز به سرعت صفر میل نخواهد کرد.

اگر فشار در مسیر حرکت جریان افزایش یابد، $\left(\frac{\partial p}{\partial x} < 0 \right)$ گرادیان فشار معکوس می شود. وقتی $\frac{\partial p}{\partial x} < 0$ (وقتی که فشار در جهت حرکت کاهش یابد). گرادیان فشار مطلوب می شود. جریان درون یک کانال با

مقطع متغیر نشان داده شده در شکل صفحه بعد را در نظر بگیرید. برای ساده کردن بحث، جریان را در طول دیواره مستقیم در نظر بگیرید.

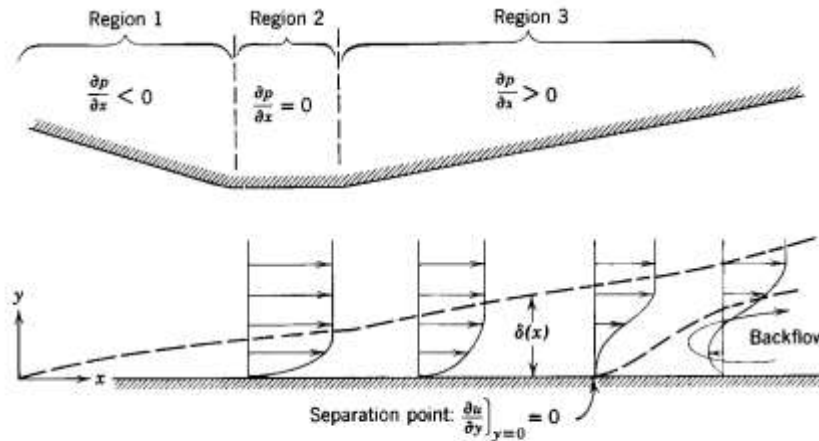


Fig. 9.6 Boundary-layer flow with pressure gradient (boundary-layer thickness exaggerated for clarity).

اگر نیروهای وارده بر یک ذره سیال نزدیک به مرزهای سخت را در نظر بگیریم، مشاهده می کنیم که یک نیروی برشی خالص بدون توجه به علامت گرادیان فشار روی ذره وجود دارد. برای $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$ ، نتیجه کاهش در مومنتم است. اما همانطور که قبلاً نشان دادیم، این کافی برای متوقف کردن ذره نمی باشد. از آنجایی که در ناحیه (۱) $\frac{\partial p}{\partial x} < 0$ ، فشار پشت ذره (که به حرکت آنها کمک می کند)، بزرگتر از آن است که مانع حرکت آنها شود؛ و ذره بسمت پائین سرایشی فشار می لغزد، بدون آنکه با خطر کاهش بسمت صفر روبرو شود. در هنگام عبور جریان از ناحیه (۳)، ذره مواجه با گرادیان فشار معکوس $\frac{\partial p}{\partial x} > 0$ می باشد، و ذره باید به طرف سرابالایی فشار صعود نماید. لذا ذره سیال ممکن است بسمت سکون میل کند، در نتیجه باعث می شود که سیال اطراف از مرز منحرف شود؛ وقتی این وضعیت رخ می دهد، جریان از سطح جدا می گردد. درست در پائین دست نقطه جدایی، جهت جریان در ناحیه جدا شده برخلاف جهت جریان اصلی خواهد بود.

[انرژی پائین سیال در ناحیه جدایی با افزایش فشار پائین دست به سمت بالا دست رانده می شود.]

پس ملاحظه می کنیم که گرادیان فشار $\frac{\partial p}{\partial x} > 0$ ، یکی از شرایط لازم برای ایجاد جدایی است. آیا این به معنی این است که اگر $\frac{\partial p}{\partial x} > 0$ ، باشد همیشه جدایش وجود خواهد داشت؟ خیر، این چنین نیست. ما نمی توانیم بگوئیم که با $\frac{\partial p}{\partial x} > 0$ ، همیشه با جدایش روبرو هستیم، اما جدایش رخ نمی دهد مگر $\frac{\partial p}{\partial x} > 0$ باشد.

در شکل زیر، پروفیل‌های سرعت بدون بعد برای جریان لایه مرزی ورقه ای و درهم روی یک صفحه مسطح نشان داده شده اند. پروفیل درهم نسبت به پروفیل ورقه ای خیلی کاملتر (با لبه ضخیم) است.

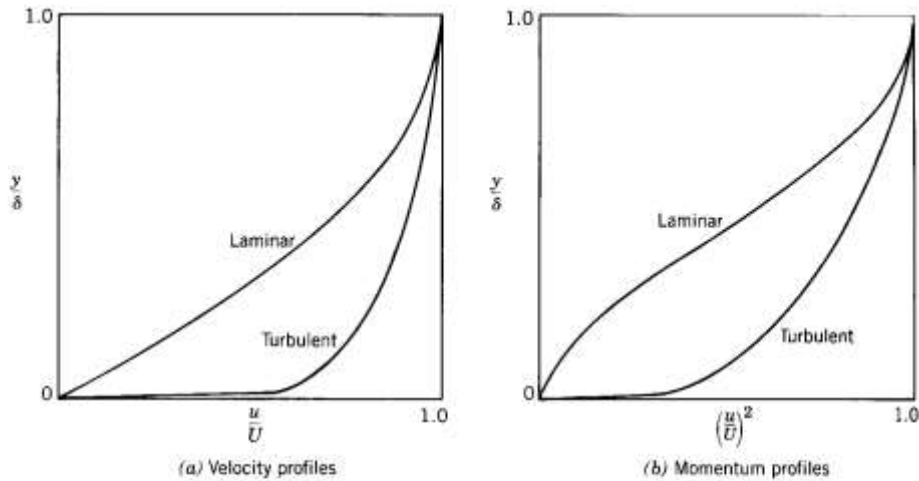


Fig. 9.7 Nondimensional profiles for flat plate boundary-layer flow.

Expanding the first term, we can write

$$\frac{\tau_w}{\rho} = U^2 \frac{d\theta}{dx} + (\delta^* + 2\theta)U \frac{dU}{dx}$$

or

$$\frac{\tau_w}{\rho U^2} = \frac{C_f}{2} = \frac{d\theta}{dx} + (H + 2) \frac{\theta}{U} \frac{dU}{dx} \quad (9.28)$$

در یک سرعت آزاد مشابه، شار مومنتم درون لایه مرزی درهم بزرگتر از شار مومنتم درون لایه مرزی ورقه ای است (شکل b). جدایش وقتی رخ می دهد که مومنتم لایه های سیال نزدیک سطح با ترکیب نیروهای وارده ناشی از فشار و لزوجت به سمت صفر کاهش یابد. همانطور که در شکل b نشان داده شده، مومنتم سیال نزدیک سطح به طور قابل ملاحظه ای برای پروفیل درهم، بیشتر است. به همین دلیل، لایه درهم بهتر توانایی مقاومت در مقابل جدایش را در گردایان فشار متوسط دارد. بعضی از پی آمدهای این رفتار را در بخش های بعدی مورد بحث قرار می دهیم.

مراحلی که معمولاً برای کنترل جدایی به کار گرفته می شود براساس روش های ذیل استوار هستند

- تطابق دادن شکل اجسام ضخیم مطابق جهت خطوط جریان
- تزریق سیال به درون لایه های مرزی
- مکش سیال از لایه های مرزی
- ایجاد حرکت در دیواره های مرزی

گرادیانهای فشار معکوس، سبب تغییرات قابل ملاحظه ای در پروفیل های سرعت جریانهای لایه مرزی ورقه ای و درهم می شود. راه حل تقریبی برای جریان با گرادیان فشار غیرصفر از، معادله انتگرالی مومنتم می تواند بدست آید.

$$\frac{\tau_w}{\rho} = \frac{d}{dx}(U^2 \theta) + \delta^* U \frac{dU}{dx}$$

با بسط دادن جزء اول می توانیم بنویسیم :

$$\frac{\tau_w}{\rho} = U^2 \frac{d\theta}{dx} + (\delta^* + 2\theta)U \frac{dU}{dx}$$

یا

$$\frac{\tau_w}{\rho U^2} = \frac{c_F}{2} = \frac{d\theta}{dx} + (H + 2) \frac{\theta}{U} \frac{dU}{dx}$$

که در آن $H = \frac{\delta^*}{\theta}$ " فاکتور شکل " پروفیل سرعت می باشد. فاکتور شکل در گرادیان فشار معکوس، افزایش می یابد. برای جریان لایه مرزی درهم، H از ۱/۳ برای گرادیان فشار صفر تا تقریباً ۲/۵ در جدایش افزایش می یابد.

برای جریان ورقه ای با گرادیان فشار صفر، $H=2.6$ و در نقطه جدایش $H=3.5$ می شود. توزیع سرعت جریان آزاد، $U(x)$ قبل از بکارگیری معادله فوق باید شناخته شده باشد. از آنجایی که $\frac{dp}{dx} = -\rho U \frac{dU}{dx}$ است، تعیین نمودن $U(x)$ مترادف است با تعیین نمودن گرادیان فشار.

ما می توانیم تقریب اول برای $U(x)$ را از تئوری جریان ایده آل برای یک جریان بدون لزوجت تحت شرایط یکسان بدست آوریم. همانطور که در فصل قبل دریافتیم، برای جریان بدون اصطکاک غیر چرخشی (جریان پتانسیل)، تابع جریان، ψ ، و پتانسیل سرعت، ϕ ، معادله لاپلاس را ارضاء می نمایند.

این معادلات می توانند برای تعیین $U(x)$ روی یک سطح جامد مورد استفاده قرار گیرند. کوششهای بسیاری توسط محققین مختلف برای محاسبه توزیعهای سرعت روی سطوح با شکلهای شناخته شده و همچنین برای تعیین فاکتورهای سطح برای ایجاد توزیع فشار دلخواه صورت گرفته است.

قسمت B: جریان سیال پیرامون اجسام غوطه ور

وقتی که بین یک جسم سخت و یک سیال که جسم در آن غوطه ور شده، سرعت نسبی وجود داشته باشد، بر اثر عمل سیال، جسم تحت نیروی خالص، \vec{F} ، قرار می گیرد. بطور کلی، نیروی بسیار کوچک، $d\vec{F}$ ، وارده بر یک المان از سطح صفحه، نه عمود بر المان است و نه موازی آن می باشد. این نیرو، می تواند زمانی بوضوح دیده شود که وضعیت نیروی سطحی که در نیروی خالص، \vec{F} ، اثر دارند، مورد بررسی قرار گیرند. اگر جسم مورد نظر درون یک سیال دارای لزوجت در حال حرکت باشد، در نتیجه دو نیروی فشاری و برشی روی جسم اثر می گذارند.

$$\vec{F} = \int_{\text{سطح جسم}} d\vec{F} = \int_{\text{سطح جسم}} d\vec{F}_{\text{برشی}} + \int_{\text{سطح جسم}} d\vec{F}_{\text{فشاری}}$$

نیروی منتجه، \vec{F} ، می تواند به مولفه هایی موازی و عمود بر جهت حرکت تقسیم شود. مولفه نیروی موازی با جهت حرکت نیروی کششی (**drag**)، \vec{F}_D ، می باشد و مولفه نیروی عمود بر جهت حرکت نیروی بالا برنده، F_L ، می باشد. با دانستن اینکه:

$$dF_{\text{برشی}} = \vec{\tau}_w dA$$

و

$$dF_{\text{فشاری}} = -p d\vec{A}$$

انتظار اینکه نیروهای کششی و بالا برنده می توانند بصورت تحلیلی محاسبه شوند، چندان برآورده نشده است؛ زیرا تنها در چند حالت ساده می توان نیروهای کششی و بالا برنده را بدون انجام کارهای آزمایشگاهی تعیین نمود. همانطور که مشاهده شد، وجود گرادیان فشار معکوس اغلب سبب جدایی می شود؛ جدایی جریان مانع تعیین تحلیلی نیروی وارده بر جسم می گردد. بنابراین برای خیلی از شکلهای مورد نیاز، برای تعیین نمودن نیروی کششی و بالا برنده باید به استفاده از ضرایب تجربی متوسل شد.

نیروی کششی Drag Force

کشش، مولفه ای از نیروی وارده بر جسم است که درست در جهت حرکت وارد می شود. اگر بخواهیم نیروی کششی F_D ، روی یک کره صاف با قطر d ، که درون یک سیال لزج و غیرقابل تراکم با سرعت V در حال حرکت است را مورد بررسی قرار دهیم، با داشتن جرم مخصوص ρ و لزجت سیال μ می توانیم بنویسیم:

$$F_D = f_1(d, V, \mu, \rho)$$

کاربرد تئوری آنالیز ابعادی (تئوری باکینگهام) تابعی به شکل زیر بدست می آید.

$$\frac{F_D}{\rho V^2 d^2} = f_2\left(\frac{\rho V d}{\mu}\right)$$

d^2 نسبتی از سطح مقطع $(A = \frac{\pi d^2}{4})$ می باشد و از این رو می توانیم بنویسیم:

$$\frac{F_D}{\rho V^2 A} = f_3\left(\frac{\rho V d}{\mu}\right) = f_3(Re)$$

هرچند معادله فوق برای یک کره بدست آمده است، اما این شکل از معادله برای جریان سیال غیرقابل تراکم روی هر جسم با شکل دیگری نیز معتبر است؛ مشخصه طول بکار برده شده در عدد رینالدز به شکل جسم بستگی دارد.

ضریب کشش، C_D ، بصورت زیر تعریف می شود:

$$C_D \equiv \frac{F_D}{\frac{1}{2} \rho V^2 A}$$

عدد $\frac{1}{2}$ برای این در فرمول وارد شده تا شکلی از فشار دینامیکی حاصل شود. با مقایسه دو معادله بالا می توان نوشت:

$$C_D = F(Re)$$

در این بحث از نیروی کششی، از اثرات تراکم پذیری یا سطح آزاد صرف نظر شده است. در صورت دخالت دادن این اثرات شکل تابع به شکل زیر خواهد بود:

$$C_D = f(Re, Fr, M)$$

در این قسمت ما باید مقدار نیروی کششی روی اجسام مختلف (بدون در نظر گرفتن اثرات تراکم پذیری و سطح آزاد) را مورد بررسی قرار دهیم. کل نیروی کششی، جمع کشش اصطکاک و کشش فشار میباشد. به هر حال ضریب کشش تنها تابعی از عدد رینالدز می باشد.

جریان روی یک صفحه مسطح موازی با جریان : کشش اصطکاک

این حالت جریان در بخشهای قبلی به تفصیل مورد بحث قرار گرفت. از آنجایی که گرادیان فشار صفر است، کل کشش برابر کشش اصطکاک می باشد. بنابراین :

$$F_D = \int_{\text{جسم صفحه}} \tau_w dA$$

و

$$C_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2} \rho V^2 A} = \frac{\int_{\text{جسم صفحه}} \tau_w dA}{\frac{1}{2} \rho V^2 A}$$

که در آن A کل سطح صفحه در تماس با سیال می باشد. (به عبارت دیگر سطح مرطوب شده)، ضریب کشش برای یک صفحه مسطح موازی با جریان، به توزیع تنش برشی در طول صفحه بستگی دارد. برای جریان ورقه ای روی یک صفحه مسطح، ضریب تنش برشی بوسیله رابطه زیر بدست می آید.

$$C_F = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2} \rho U^2} = \frac{0.664}{\sqrt{R_{ex}}}$$

ضریب کشش برای جریان با سرعت خطوط جریان آزاد V، روی یک صفحه مسطح به طول L، و پهنای b، با جانشینی τ_w از معادله فوق در معادله بدست خواهد آمد.

$$\begin{aligned} C_D &= \frac{1}{A} \int_A 0.664 R_{ex}^{-0.5} dA = \frac{1}{bL} \int_0^L 0.664 \left(\frac{V}{v}\right)^{-0.5} x^{-0.5} b dx \\ &= \frac{0.664}{L} \left(\frac{v}{V}\right)^{-0.5} \left[\frac{x^{0.5}}{0.5} \right]_0^L = 1.328 \left(\frac{v}{VL}\right)^{0.5} \end{aligned}$$

$$C_D = \frac{1.328}{\sqrt{R_{eL}}}$$

با فرض کردن اینکه لایه مرزی از لبه صفحه حالت توربولنت دارد، ضریب تنش برشی، براساس روش تقریبی در بخشهای قبل با رابطه زیر داده می شود:

$$C_F = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho U^2} = \frac{0.0594}{R_{ex}^{1/5}}$$

با جایگزینی مقدار τ_w از این معادله در معادله C_D ، خواهیم داشت:

$$C_D = \frac{1}{A} \int_A 0.0594 R_{ex}^{-0.2} dA = \frac{1}{bL} \int_0^L 0.0594 \left(\frac{V}{v}\right)^{-0.2} x^{-0.2} b dx$$

$$= \frac{0.0594}{L} \left(\frac{v}{V}\right)^{-0.2} \left[\frac{x^{0.8}}{0.8} \right]_0^L = 0.074 \left(\frac{v}{VL}\right)^{0.2}$$

$$C_D = \frac{0.074}{R_{ex}^{1/5}}$$

این معادله برای $10^7 < R_{eL} < 5 \times 10^5$ معتبر است.

برای $10^9 < R_{eL}$ معادله تجربی ارائه شده توسط شولیتز،

$$C_D = \frac{0.455}{(\log R_{eL})^{2.58}}$$

با ارقام تجربی سازگاری خوبی دارد.

برای لایه مرزی حالت انتقالی (بینابین)، از روابط زیر می توان استفاده نمود.

$$C_D = \frac{0.074}{R_{eL}^{1/5}} - \frac{1740}{R_{eL}} \quad (5 \times 10^5 < R_{eL} < 10^7)$$

ویا

$$C_D = \frac{0.455}{(\log R_{eL})^{2.58}} - \frac{1610}{R_{eL}} \quad (5 \times 10^5 < R_{eL} < 10^9)$$

تغییر در ضریب کشش برای یک صفحه صاف موازی با جهت جریان در شکل زیر نشان داده شده است. در این منحنی فرض شده که حالت انتقال برای جریانی که ابتدا ورقه ای است، در $Re_x = 5 \times 10^5$ اتفاق می افتد.

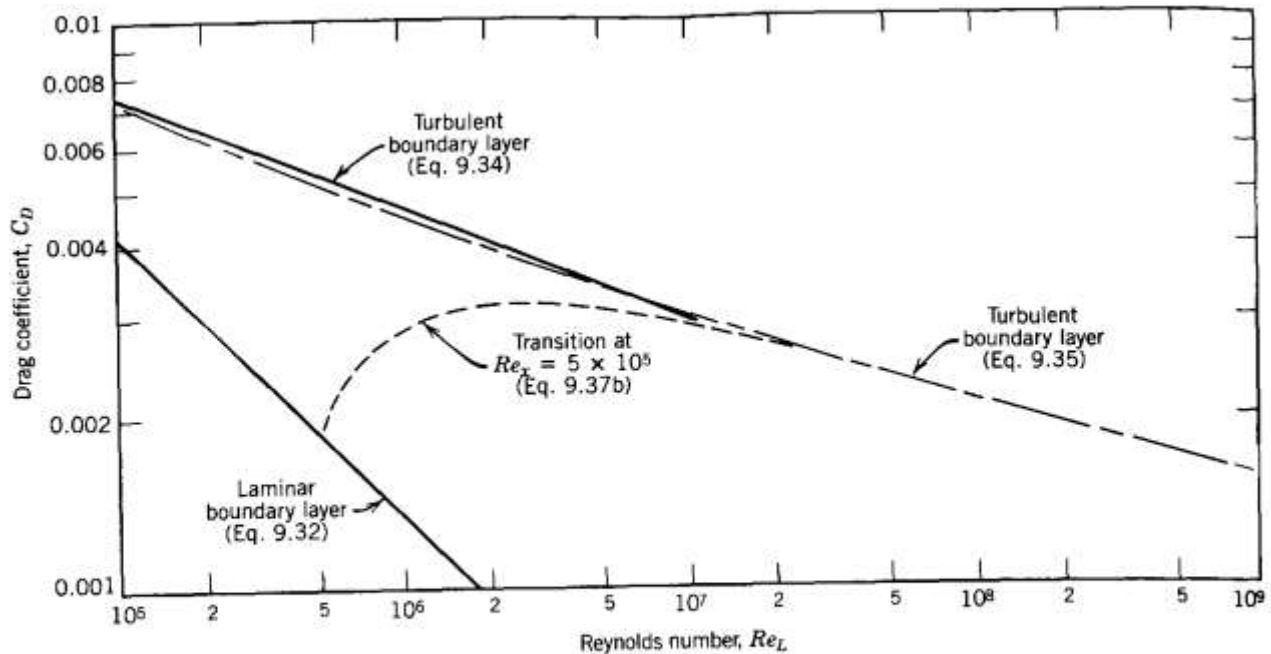


Fig. 9.8 Variation of drag coefficient with Reynolds number for a smooth flat plate parallel to the flow.

عدد رینالدز که در آن حالت انتقالی رخ می دهد، بستگی به فاکتورهای زیادی مانند زبری سطح صفحه و آشفتگی های جریان آزاد دارد. با افزایش زبری سطح صفحه یا آشفتگی های جریان آزاد، ناحیه انتقال تمایل به زودتر رخ دادن خواهد داشت (در عدد رینالدز کمتری رخ می دهد). شکل فوق نشان می دهد که برای یک صفحه با طول مشخص، وقتی که جریان ورقه ای در مسافت طولانی خود را نگه دارد، مقدار ضریب کشش کم خواهد بود. بهر حال برای Re_L بزرگ (10^7) تاثیر کشش ورقه ای نادیده گرفته شده است.

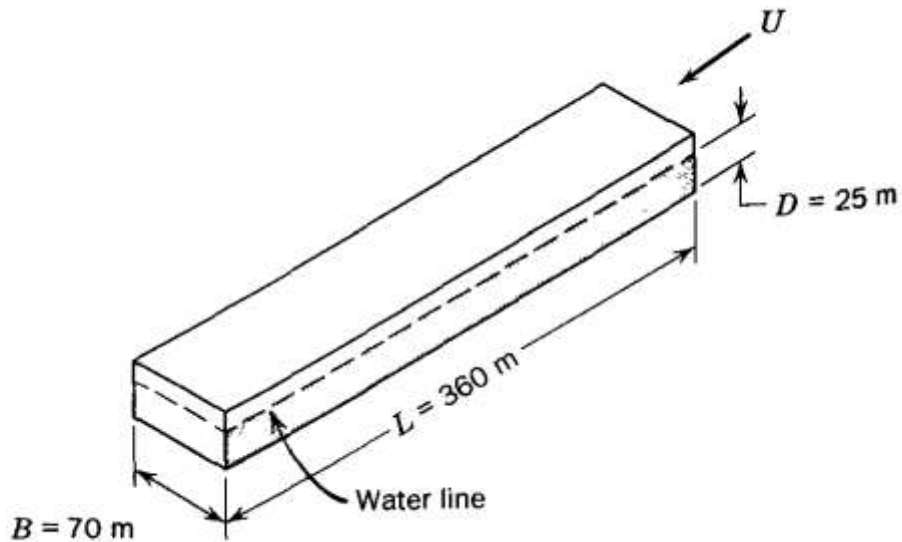
مثال : کشش اصطکاک سطحی روی یک تانکر بزرگ دریایی

یک تانکر بزرگ دریایی دارای 360m طول است و پهنای آن 70m و ارتفاعی از آن که در آب می باشد (draft) 25m است. اگر سرعت آن در آب دریا با $10^0 C$ حرارت، 13knots باشد، مقدار نیرو و توان مورد نیاز جهت غلبه بر کشش اصطکاکی سطحی را محاسبه نمائید.

داده ها: یک کشتی بزرگ در حال سفر با $U=13 \text{ knots}$.

خواسته ها: الف) نیرو

ب) توان مورد نیاز برای غلبه بر کشش اصطکاکی سطحی



لا

شه کشتی را بصورت یک صفحه مسطح با طول L و پهنای $b=B+2D$ که با آب در تماس است، بصورت مدل در نظر می گیریم. با استفاده از ضریب کشش، مقدار کشش اصطکاکی سطحی را محاسبه می کنیم.

معادلات مورد نیاز:

$$C_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2} \rho U^2 A} \quad (1)$$

$$C_D = \frac{0.455}{(\log R_{eL})^{2.58}} - \frac{1610}{R_{eL}} \quad (2)$$

سرعت کشتی 13 knots (مایل دریایی در ساعت) است، بنابراین:

$$U = 13 \frac{nm}{h} \times 1852 \frac{m}{nm} \times \frac{h}{3600s} = 6.69 \text{ m/s}$$

برای آب دریا در $10^0 C$ ، $\nu = 1.4 \times 10^{-6} \text{ m}^2/s$ است، پس:

$$R_{eL} = \frac{UL}{\nu} = 6.69 \text{ m/s} \times 360 \text{ m} \times \frac{\text{s}}{1.4 \times 10^{-6} \text{ m}^2} = 1.72 \times 10^9$$

با فرض کردن اینکه معادله (۲) صادق است :

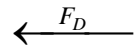
$$C_D = \frac{0.455}{(\log 1.72 \times 10^9)^{2.58}} - \frac{1610}{1.72 \times 10^9} = 0.00147$$

و از معادله (۱) داریم :

$$F_D = C_D A \frac{1}{2} \rho U^2$$

$$= 0.00147 \times (360 \text{ m})(70 + 50) \text{ m} \times \frac{1}{2} \times 1020 \text{ kg/m}^3 \times (6.69)^2 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \times \frac{\text{N} \cdot \text{s}^2}{\text{kgm}}$$

$$F_D = 1.45 \text{ MN}$$



توان مورد نیاز برابر است با :

$$P = F_D U = 1.45 \times 10^6 \text{ N} \times 6.69$$

$$P = 9.70 \text{ MW}$$

این توان مورد نیاز ($\approx 10000 \text{ KW}$) اولیه است . هرچند ضریب کشش بسیار کم است، اما سطح مرطوب بسیار بزرگ است ($\approx 43000 \text{ m}^2$). چون عدد رینالدز بزرگ است، اثرات جریان ورقه ای قابل صرف نظر می باشد (انتقال در $x \approx 0.1 \text{ m}$ رخ می دهد.)

جریان اطراف یک صفحه مسطح عمود بر جهت جریان : کشش فشار

در جریان اطراف یک صفحه عمود بر جریان (شکل زیر)، تنش برشی دیواره دخالتی در نیروی کششی ندارد. کشش بوسیله رابطه زیر بیان می شود:

$$F_D = \int_{\text{سطح}} p dA$$

$$F_D = \int_{\text{surface}} p dA$$

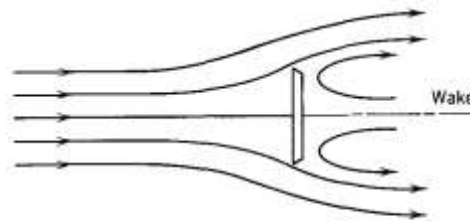


Fig. 9.9 Flow over a flat plate normal to the flow.

برای این شکل، جریان از لبه صفحه جدا می گردد؛ جریان برگشتی در محل انرژی کم (Wake) صفحه، وجود دارد. هرچند فشار روی سطح پشت صفحه اساساً ثابت است، اما مقدار آن نمی تواند بصورت تحلیلی تعیین شود. به همین دلیل، برای تعیین نیروی کششی باید به نتایج تجربی متوسل شد. ضریب کشش، برای جریان در اطراف یک جسم غوطه ور معمولاً به سطح جلویی (یا سطح project) جسم بستگی دارد.

ضریب کششی برای یک سطح محدود عمود بر جهت جریان، به نسبت پهنای صفحه به ارتفاع آن و به عدد رینالدز بستگی دارد.

برای R_e (بر اساس ارتفاع) بیشتر از حدود 1000، ضریب کششی اساساً به عدد رینالدز وابسته نیست. تغییرات C_D با نسبت پهنای صفحه به ارتفاع آن (b/h) در شکل زیر نشان داده شده است.

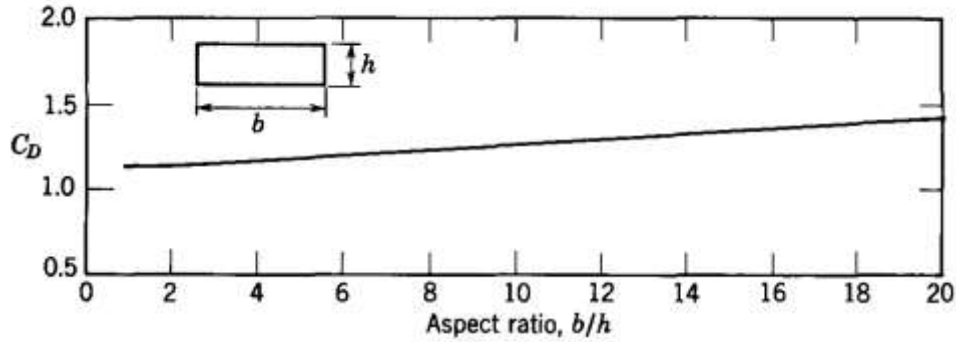


Fig. 9.10 Variation of drag coefficient with aspect ratio for a flat plate of finite width normal to the flow with $Re_h > 1000$ [14].

(نسبت b/h "نسبت منظر aspect" صفحه تعریف شده است). برای $b/h = 1$ ، ضریب کششی در حداقل

خود یعنی $C_D = 1.18$ می باشد؛ این مقدار کمی بیشتر از ضریب کششی یک صفحه دایره ای [دیسک]

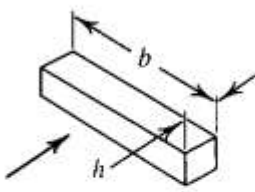
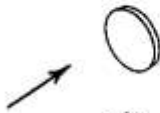

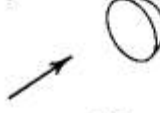
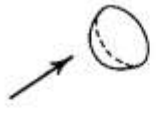
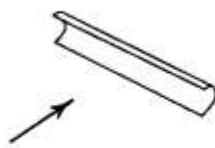
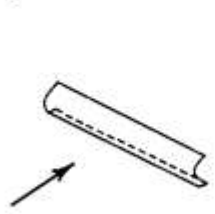
($C_D = 1.17$) در عدد رینالدز بالا است.

ضریب کششی برای همه اجسام با لبه تیز، اساساً غیر وابسته به عدد رینالدز (برای $Re \geq 1000$) است؛

زیر نقاط جدایی بوسیله شکل اجسام رقم زده می شود.

ضریب کششی برای تعدادی اجسام مشخص، در جدول زیر ارائه شده اند.

Table 9.3 Drag Coefficient Data for Selected Objects ($Re \geq 10^3$)^a

Object	Diagram	$C_D(Re \geq 10^3)$
Square prism		$b/h = \infty$ 2.05 $b/h = 1$ 1.05
Disk		1.17
Ring		1.20 ^b
Hemisphere (open end facing flow)		1.42
Hemisphere (open end facing downstream)		0.38
C-section (open side facing flow)		2.30
C-section (open side facing downstream)		1.20

^a Data from [14].

^b Based on ring area.

جریان در اطراف اجسام کره ای و استوانه ای شکل: کشش اصطکاک و فشار

در قسمت قبل، دو حالت ویژه جریان که در آنها کشش فشار و اصطکاک، حالت های منحصر به فردی از کشش ارائه می نمودند، بررسی شد. در حالت اول، ضریب کشش شدیداً تابعی از عدد رینالدز بوده، در حالی که در حالت بعدی، C_D برای $Re \geq 1000$ اساساً غیر وابسته به عدد رینالدز بود.

در حالت جریان در اطراف یک کره، کشش فشار و کشش اصطکاک هردو در مقدار کل کشش دخالت دارند. ضریب کششی برای جریان اطراف یک کره صاف در شکل صفحه بعد بصورت تابعی از عدد رینالدز نشان داده شده است.

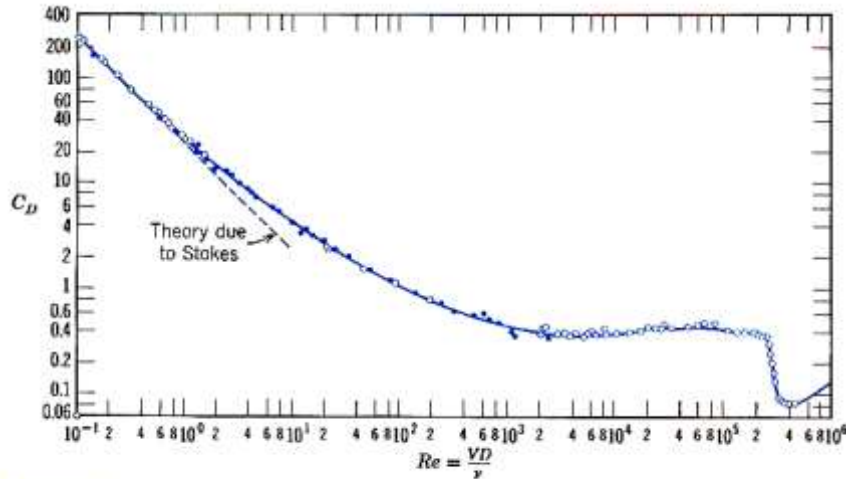


Fig. 9.11 Drag coefficient of a smooth sphere as a function of Reynolds number [3].

در عدد رینالدز خیلی پائین $R_e \leq 1$ ، جدایی جریان از یک کره وجود نخواهد داشت؛ بصورت تحلیلی، برای جریانهای با عدد رینالدز خیلی پائین که در آنها می توان از نیروهای سکون **inertio** صرفنظر نمود، مقدار نیروی کششی روی یک کره با قطر d ، که با سرعت V در حال حرکت درون یک سیال با لزوجت μ است، بوسیله رابطه زیر بیان می شود:

$$F_D = 3\pi\mu Vd$$

بنابراین ضریب کششی، C_D ، تعریف شده با معادلات قبل می شود.

$$C_D = \frac{24}{R_e}$$

همانطور که در شکل بالا نشان داده شده این رابطه با مقادیر تجربی در اعداد رینالدز پائین توافق دارد، اما برای $R_e > 1.0$ شروع به جدا شدن از ارقام تجربی می نماید.

با افزایش عدد رینالدز به حدود 1000، ضریب کششی رفته رفته کاهش می یابد. بر اثر جدایی جریان، مقدار کشش ترکیبی از کشش فشار و کشش اصطکاک می باشد.

نسبت دخالت کشش اصطکاک با افزایش عدد رینالدز کاهش می یابد؛ در $R_e \cong 1000$ کشش اصطکاک حدوداً 5 درصد کل کشش است.

در حدود $10^3 < R_e < 3 \times 10^5$ ، منحنی ضریب کششی تقریباً بصورت افقی است. ضریب کشش در عدد رینالدز بحرانی (حدوداً 3×10^5) دستخوش یک کاهش شدید می شود. تجارب نشان می دهد که برای $R_e < 3 \times 10^5$ ، لایه مرزی در قسمت جلوی کره ورقه ای است. جدایی لایه مرزی درست در بالا دست مقطع

وسط کره رخ می دهد: نسبتاً یک ناحیه wake توربولنت پهن در قسمت پائین دست کره ایجاد می شود. در قسمت جدایش پشت کره، فشار اساساً ثابت و کمتر از فشار در قسمت جلوی کره است (شکل زیر). این اختلاف در فشار جزء اصلی موثر در کشش است.

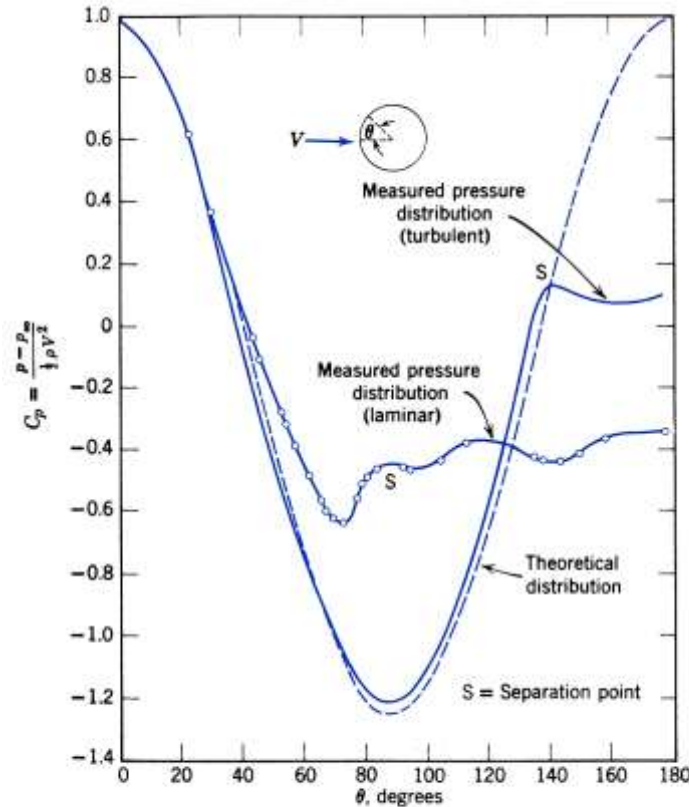


Fig. 9.12 Pressure distribution around a smooth sphere for laminar and turbulent boundary-layer flow, compared with inviscid flow [16].

برای اعداد رینالدز بزرگتر از 3×10^5 ، حالت انتقال (برای لایه مرزی) اتفاق می افتد و لایه مرزی در قسمت جلوی کره، توربولنت می شود. سپس نقطه جدایی از قسمت وسط مقطع به سمت پائین دست حرکت می نماید، و اندازه wake کاهش می یابد. نیروی فشاری خالص روی کره کاهش می یابد (شکل قبل) و ضریب کشش بشدت کاهش می یابد.

لایه مرزی توربولنت، از آنجایی که، از مقدار مومنتم بیشتری نسبت به لایه مرزی ورقه ای برخوردار است، بهتر می تواند در مقابل شیب فشار معکوس مقاومت نماید، همانطور که در بخشهای قبلی مورد بحث قرار گرفته است. بدین جهت جریان لایه مرزی توربولنت روی اجسام [غیرتیز] مطلوب تر است، زیرا باعث تاخیر در جدایی شده و در نتیجه سبب کاهش ضریب کشش می گردد.

انتقال در لایه مرزی تحت تاثیر زبری سطح کره و آشفتگی در خطوط اصلی جریان می باشد. بنابراین کاهش در کشش که با لایه مرزی توربولنت همراه است، در یک مقدار مشخص ثابت از عدد رینالدز رخ نمی دهد. آزمایشات روی کره های صاف درون یک جریان با سطح آشفتگی پائین، نشان می دهد که انتقال ممکن است تا عدد رینالدز بحرانی R_{eD} ، در حدود 4×10^5 تاخیر بیافتد. برای سطوح زبر و یا در

حالتی که خطوط آزاد دارای آشفتگی زیاد باشد، انتقال در عدد رینالدز بحرانی بسیار پائین ۵۰۰۰، اتفاق می افتد.

ضریب کششی روی یک کره با جریان لایه مرزی توربولنت، در حدود یک پنجم ضریب کشش برای لایه مرزی ورقه ای با عدد رینالدز نزدیک بحرانی است.

شکل زیر، ضریب کشش را برای جریان در اطراف یک سیلندر صاف نشان می دهد. تغییرات C_D با عدد رینالدز، مشخصات یکسانی را در مقایسه با جریان در اطراف یک کره صاف نشان می دهد، اما مقادیر C_D تقریباً دو برابر بزرگتر هستند.

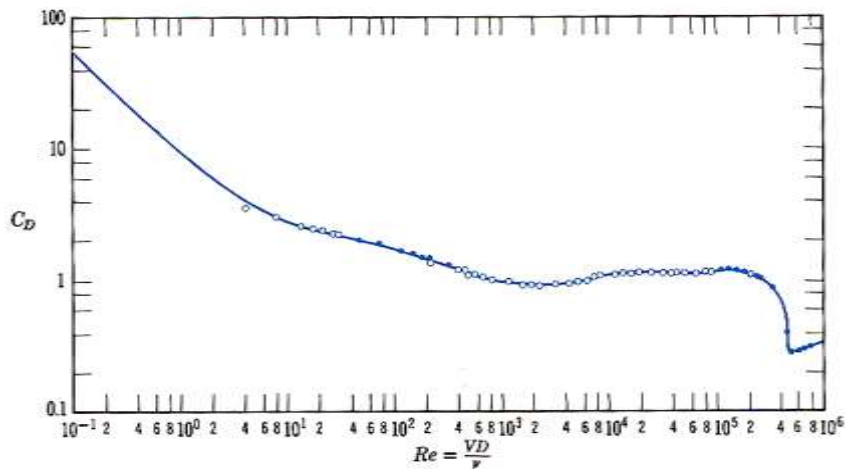


Fig. 9.13 Drag coefficient for a smooth circular cylinder as a function of Reynolds number [3].

جریان اطراف یک سیلندر دایره ای صاف ممکن است سبب ایجاد یک الگوی یکنواخت از ورتکس در پائین دست شود. ورتکس انتهایی سبب نوسان نیروی بالا برنده روی سیلندر در جهت عمود بر حرکت خطوط جریان می گردد. ایجاد ورتکس سبب میشود تا سیم های تلگراف صدا دهند و یا طنابهای میله های پرچم بطور شدید صدا دهند.

ارقام تجربی نشان میدهند که ورتکس عمومی در اعداد رینالدز از حدود ۶۰ تا ۵۰۰۰ بصورت شدید رخ می دهد.

مثال: کشش آیرودینامیک و Moment روی یک دودکش

یک دودکش استوانه ای با یک متر قطر و 25m بلندی در مسیر بادی با سرعت 50km/h در حالت هوای استاندارد قرار دارد. اثرات انتهایی و تند بادهای قابل صرف نظر میباشند.

حساب کنید مومنت خمیدگی ناشی از نیروی باد روی پایه دودکش را .

داده ها: دودکش استوانه ای $L=25\text{ m}$ و $D=1\text{ m}$

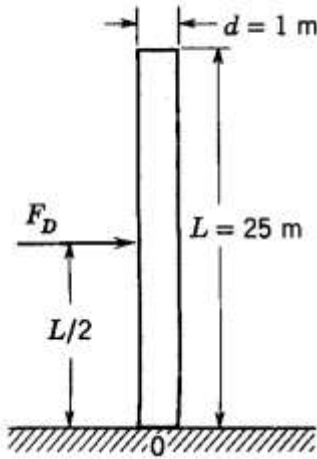
در یک جریان هوای یکنواخت با $V = 50\text{ km/h}$ و $P = 101\text{ kpa}$ و

$$T = 15^{\circ}\text{C}$$

از اثرات انتهایی صرف نظر شود.

خواسته ها: مومنت خمیدگی در کف دودکش

راه حل :



ضریب کشش با رابطه $C_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2}\rho V^2 A}$ داده شده و بنابراین $F_D = C_D A \frac{1}{2}\rho V^2$

از آنجایی که نیرو در واحد طول روی همه طول یکنواخت است، نیروی منتهجه F_D ، بر وسط دودکش اثر می کند. لذا گشتاور حول کف دودکش برابر است با :

$$M_D = F_D \frac{L}{2} = C_D A \frac{1}{2}\rho V^2 \frac{L}{2} = C_D A \frac{L}{4}\rho V^2$$

$$V = 50\text{ Km/h} \times 10^3\text{ m/km} \times \frac{1\text{ h}}{3600\text{ s}} = 13.9\text{ m/s}$$

برای هوای استاندارد $\rho = 1.23\text{ kg/m}^3$ ، $\mu = 1.78 \times 10^{-5}\text{ kg/m}^2$

بنابراین

$$R_e = \frac{\rho V D}{\mu} = 1.23\text{ Kg/m}^3 \times 13.9\text{ m/s} \times 1\text{ m} \times \frac{\text{m.s}}{1.78 \times 10^{-5}\text{ kg}} = 9.61 \times 10^5$$

از شکل قبل داریم $C_D \approx 0.35$. برای یک سیلندر $A=DL$ لذا :

$$M_0 = C_D A \frac{L}{4}\rho V^2 = C_D DL \frac{L}{4}\rho V^2 = C_D D \frac{L^2}{4}\rho V^2$$

$$= \frac{1}{4} \times 0.35 \times 1\text{ m} \times (25)^2\text{ m}^2 \times 1.23\text{ kg/m}^3 \times (13.9)^2\text{ m}^2/\text{s}^2 \times \frac{\text{N.S}^2}{\text{kg.m}}$$

$$M_0 = 13.0 \text{ KN.m}$$

این مسئله کاربرد ارقام ضریب کشش برای محاسبه گشتاور بر اثر نیروی باد روی ساختمانها را شرح می دهد. در حقیقت، پروفیل سرعت هوای باد روی سطح زمین یکنواخت نیست. سرعت باد در لایه مرزی اتمسفر اغلب با بکارگیری پروفیل Power Law مدل می شود.

مثال:

یک ماشین با جرم 800kg در مسافت 400m سرعتش به 435km/h رسید. ناگهان بعد از ثابت ماندن سرعت، راننده صفحه کششی (فرض کنید بصورت نیم کره) با سطح $A = 2.3m^2$ را در جلوی جریان هوا باز می کند. از هوا و اصطکاک چرخهای ماشین صرفنظر نمایند. پیدا کنید زمان مورد نیاز برای اینکه سرعت ماشین به 160km/h در هوای استاندارد برسد.

داده ها: ماشین با جرم 800kg که با سرعت 435km/h در حال حرکت است، بوسیله نیروی کششی روی صفحه مخصوص با سطح $A = 2.3m^2$ سرعتش کم می شود. از اصطکاک هوا و چرخها صرفنظر می شود. و هوای با شرایط استاندارد جریان دارد.

خواسته ها: زمان موردنیاز برای ماشین تا سرعتش به 160km/h کاهش یابد .

راه حل :

با در نظر گرفتن اتومبیل به صورت یک سیستم و نوشتن قانون دوم نیوتن در جهت حرکت خواهیم داشت:

$$-F_D = ma = m \frac{dV}{dt}$$



$$V_0 = 432 \text{ km/h}$$

$$160 V_f = \text{Km/h}$$

$$\rho = 1.23 \text{ kg / m}^3$$

از آنجایی که $F_D = \frac{1}{2} C_D \rho V^2 A$ ، $C_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2} \rho V^2 A}$ است .

با جایگزینی در قانون دوم نیوتن خواهیم داشت:

$$-\frac{1}{2} C_D \rho V^2 A = m \frac{dV}{dt}$$

با جدا سازی متغیرها و انتگرالگیری، بدست می آوریم :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} C_D \frac{A}{m} \int_0^t dt &= \int_{V_0}^{V_f} \frac{dV}{V^2} \\ -\frac{1}{2} C_D \rho \frac{A}{m} t &= -\left[\frac{1}{V} \right]_{V_0}^{V_f} \\ &= -\frac{1}{V_f} + \frac{1}{V_0} = -\frac{(V_0 - V_f)}{V_0 V_f} \end{aligned}$$

در نهایت

$$t = \frac{(V_0 - V_f)}{V_f V_0} \frac{2m}{C_D \rho A}$$

با فرض کردن صفحه کششی بصورت یک نیم کره (که قسمت باز آن روبروی جریان است)، از جدول مربوطه $C_D = 1.42$ (با فرض $10^3 < R_e$) پس با جایگزینی مقادیر خواهیم داشت:

$$t = (435 - 160) \frac{km}{h} \times 2 \times 800kg \times \frac{h}{160km} \times \frac{h}{435km} \times \frac{m^2}{1.42 \times 1.23kg} \times \frac{1}{2.3m^2} \times \frac{kg.m}{N.s^2} \times \frac{1}{1000} \times 3600S/h \Rightarrow t = 5.67S$$

با چک کردن R_e فرض شده ،

$$R_e = \frac{DV}{\nu} = \left[\frac{4A}{\pi} \right]^{1/2} \frac{V}{\nu} = \left[\frac{4}{\pi} \times 2.3m^2 \right]^{1/2} \times 160km/h \times \frac{h}{3600} \times 1000m/km \times \frac{s}{1.46 \times 10^{-5}m^2}$$

$$R_e = 5.21 \times 10^6$$

لذا فرضیات صحیح بوده است.

همه ارقام تجربی ارائه شده در این بخش برای اجسام منفرد غوطه ور در سیال نامحدود هستند. موضوعیت آزمایشات در تونل باد برای شبیه سازی جریان نامحدود است. محدودیت ها در اندازه دستگاه رسیدن به چنین هدفی را غیر ممکن می کند. لذا اغلب برای تبدیل نتایج بدست آمده برای موارد عملی، حالات جریان نامحدود نیاز است تا ضریب تصحیحی برای ارقام بدست آمده بکار گرفته شود. در

خیلی از حالات جریان حقیقی، در اجسام و یا سطوح نزدیک بهم، اثرات متقابل رخ می دهد. وقتی دو یا چند جسم در حال حرکت پشت سر هم باشند کشش بطور قابل ملاحظه ای برای جسم دوم به بعد کاهش می یابد. این پدیده توسط دو چرخه سواران و یا در مسابقات اتومبیل رانی بخوبی تجربه می شود. در این گونه موارد، اگر فاصله حالت اپتیمم داشته باشد، کشش ممکن است تا ۸۰٪ کاهش یابد. اگر فاصله اپتیمم نباشد کشش ممکن است افزایش یابد.

بهمین ترتیب کشش ممکن است تحت تاثیر اطراف خود واقع شود. ذرات کوچک که تحت نیروی جاذبه حرکت می کنند، وقتی که ذرات دیگری در کنار آنها وجود دارد، در مقایسه با زمانی که بصورت مجزا حرکت می کنند سرعت کمتری خواهند داشت. جریانهای با عدد رینالدز پائین، کاربردهای مهمی در روند رسوبگذاری و Mixing دارد.

Lift نیروی بالا برنده

نیروی بالا برنده، مولفه عمود بر جهت جریان نیروی منتهجه ایرودینامیک است. یک مثال عمومی از نیروی بالا برنده جریان در اطراف بالها (airfoil) میباشد. ضریب بالا برنده، C_L ، بصورت زیر تعریف می شود.

$$C_L = \frac{F_L}{\frac{1}{2}\rho V^2 A_p}$$

ضرایب Lift و drag برای یک airfoil، تابع عدد رینالدز و زاویه برخورد می باشند؛ زاویه برخورد، α ، زاویه بین airfoil و بردار سرعت جریان آزاد میباشد. ارقام ضرایب کشش و بالا برنده برای مقطع به شکلهای معمولی و شکلهای جریان لامینار برای عدد رینالدز 9×10^6 در شکل ۹/۱۷ رسم شده اند. جزئیات شماره مقطع در زیر شکلهای توضیح داده شده است.

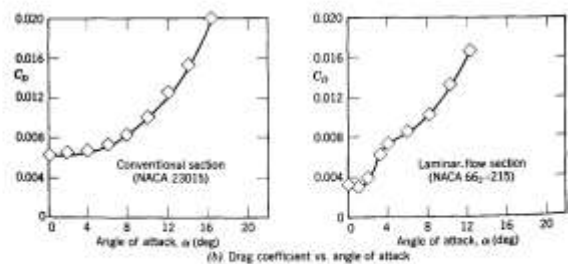
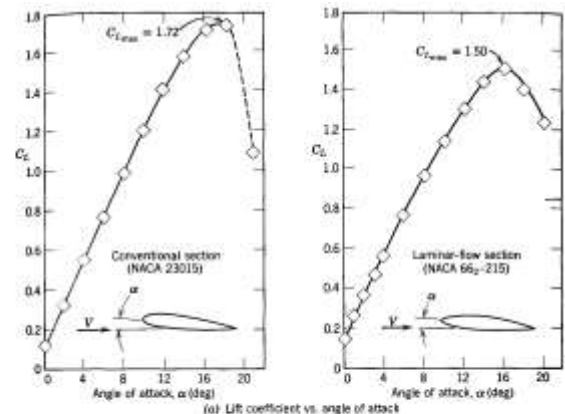
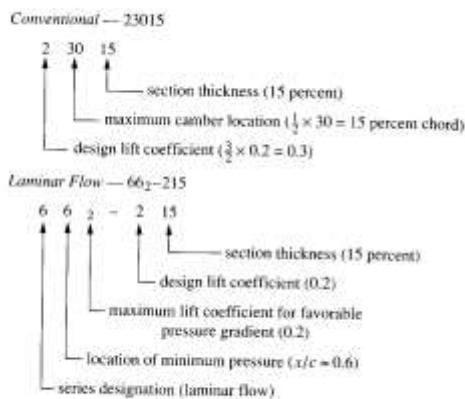


Fig. 9.17 Lift and drag coefficients versus angle of attack for two airfoil sections of 15 percent thickness ratio. (Data from [19].)

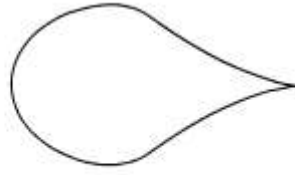


Fig. 9.16 Nearly optimum shape for low-drag strut [22].

هر دو مقطع طوری قوس داده شده اند تا در زاویه برخورد صفر ایجاد lift نمایند. با افزایش زاویه برخورد، ضرایب بالا برنده بتدریج افزایش می یابد تا مقدار آن به حداکثر برسد. افزایش بیشتر زاویه برخورد، باعث کاهش ناگهانی در C_L می شود. وقتی C_L دچار کاهش می شود، گفته می شود بال دچار ایست شده است. ایست بال نتیجه جدایی جریان روی قسمت عمده ای از سطح بالایی بال است. همانطور که زاویه برخورد زیاد می شود، نقطه stagnation بسمت عقب سطح پائینی بال حرکت می کند. (همانطور که در شکل ۹/۱۸ بصورت شماتیک نشان داده شده است).

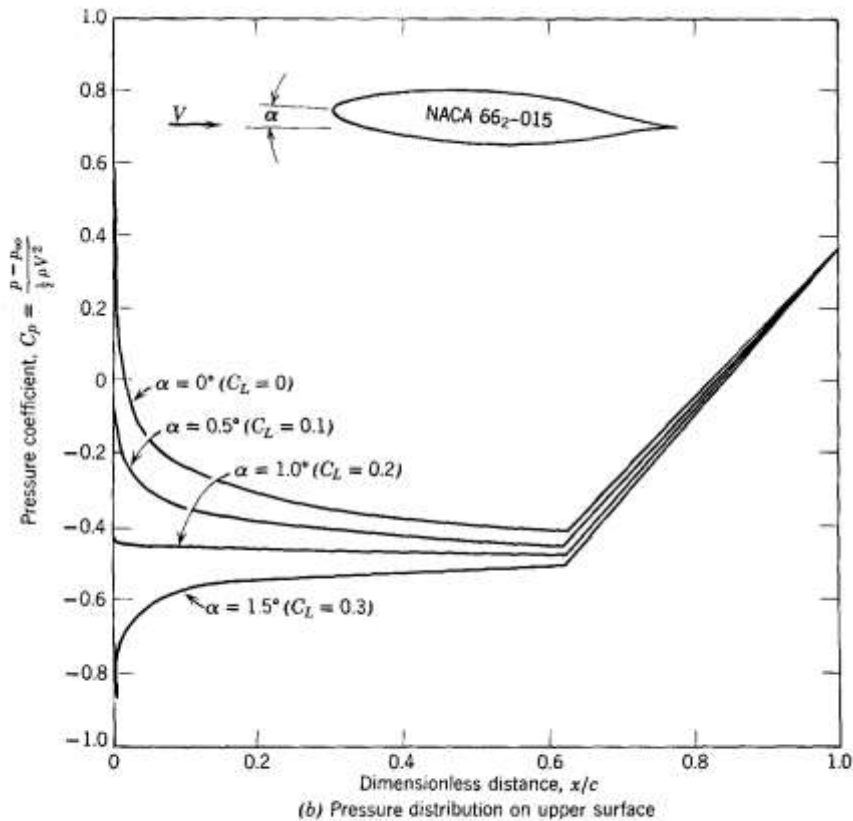
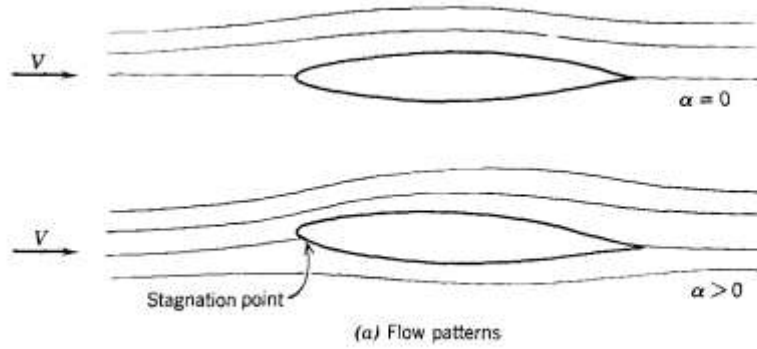


Fig. 9.18 Effect of angle of attack on flow pattern and theoretical pressure distribution for a symmetric laminar-flow airfoil of 15 percent thickness ratio. (Data from [19].)

در یک بال با سطح محدود، وقتی که نیروی بالا برنده عمل می کند، همیشه با پدیده ورتکس های انتهایی همراه هستند. همانطور که در شکل ۹/۲۰ به صورت شماتیک نشان داده شده اند. ورتکس های انتهایی، نتیجه نشت جریان ها اطراف لبه بال از فشار زیاد قسمت پائین به فشار پائین قسمت بالای بال هستند. ورتکس انتهایی، ممکن است خیلی قوی و مداوم باشند، و ممکن است برای هواپیماهای سبکی که حدود ۸ تا ۱۵ کیلومتر پشت هواپیماهای بزرگ حرکت می کنند، خطر ساز باشند. سرعت های حدود ۳۰۰ km/h در ورتکس های انتهایی هواپیماهای سنگین و بزرگ اندازه گیری شده است.

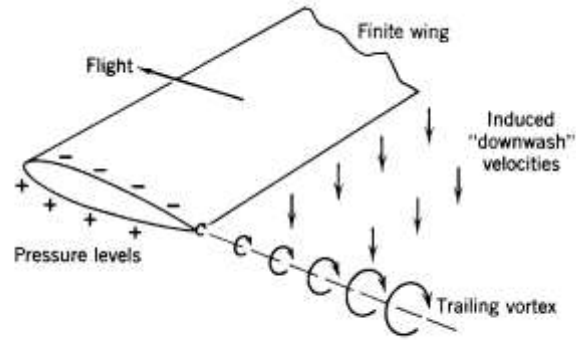


Fig. 9.20 Schematic representation of the trailing vortex system of a finite wing.

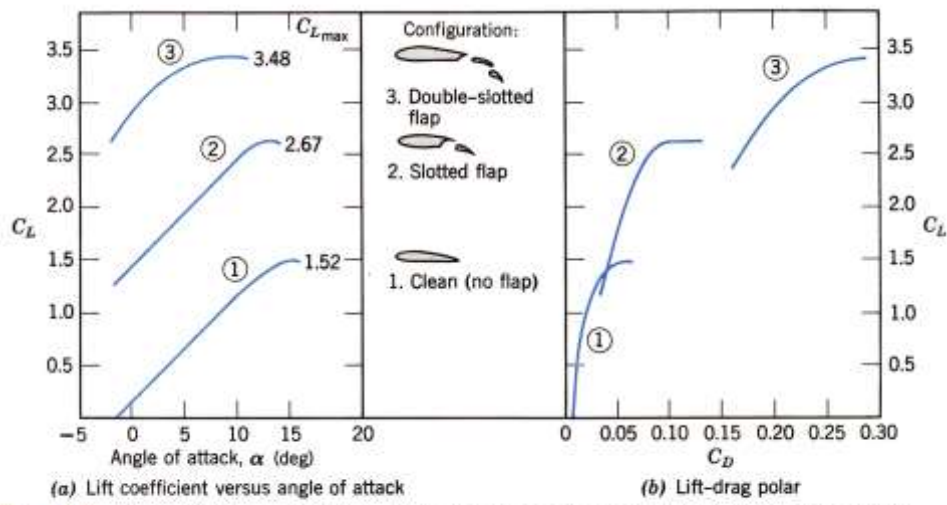


Fig. 9.23 Effect of flaps on aerodynamic characteristics of NACA 23012 airfoil section. (Data from [19].)



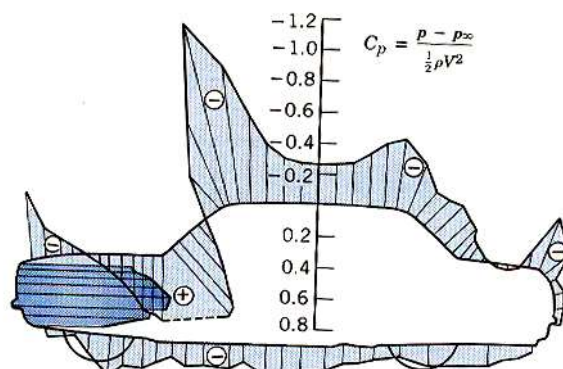
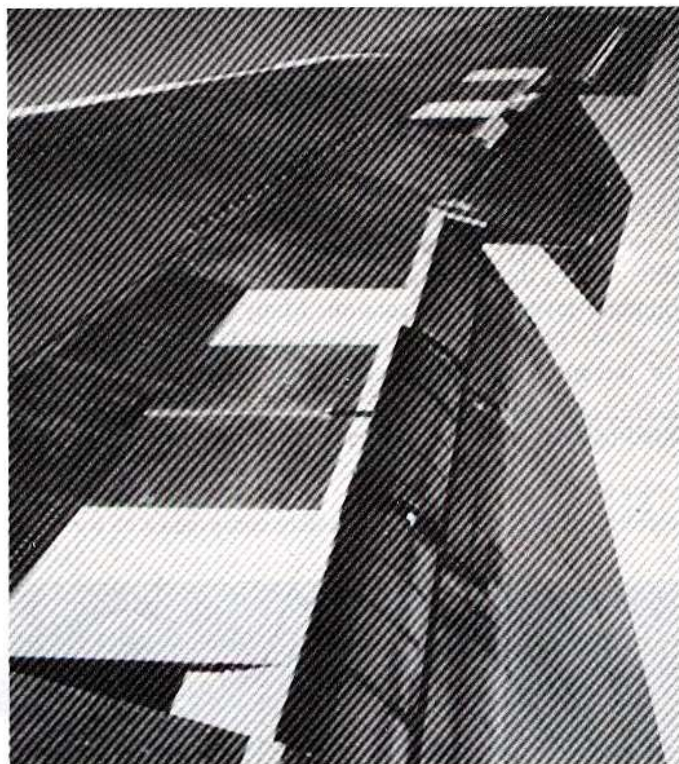


Fig. 9.25 Pressure distribution along the centerline of an automobile [28].

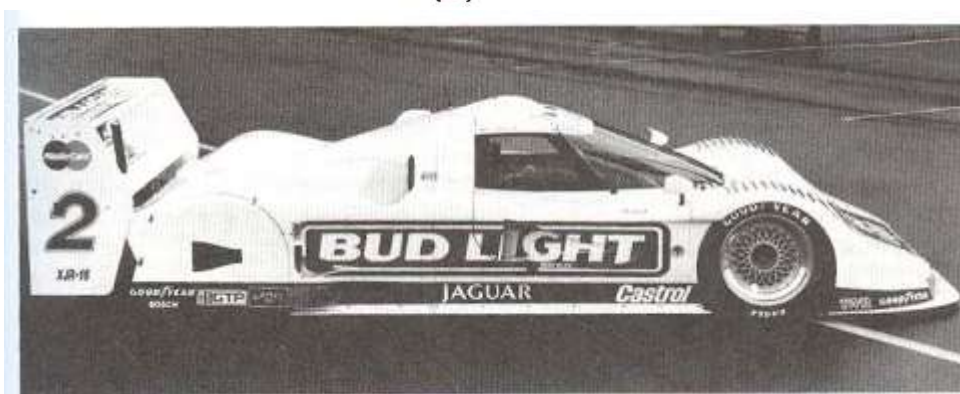


Table 9.1
The effects of automobile body shapes on aerodynamic drag

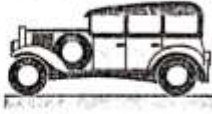
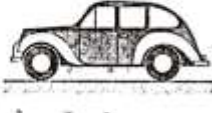
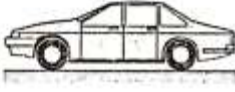


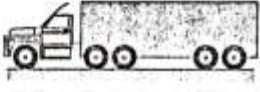









	Body shape	C_D based on frontal area
1920		0.80
1940-45		0.54-0.58
1968-69		0.36-0.38
1990-92		0.29-0.30
Tractor-trailer		0.75-0.95
With rounded cab, fairing		0.55-0.75

TABLE 6.1 Aerodynamic and rolling resistance data for several bicycle-rider configurations traveling at a speed of 20 mi/h (8.9 m/s)

Configuration	D_f Drag Force		Rolling Resistance		Drag Coefficient $C_D = \frac{D_f}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2 A}$		Frontal Area A	
	lbf	N	lbf	N			ft ²	m ²
European Upright Commuter 	40-lb bike, 160-lb rider, tires: 27 in. dia., 40 psi	6.14	27.3	1.20	5.34	1.1	5.5	0.51
Touring (Arms Straight) 	25-lb bike, 160-lb rider, tires: 27 in. dia., 90 psi	4.40	19.6	0.83	3.69	1.0	4.3	0.40
Racing (Fully Crouched) 	20-lb bike, 160-lb rider, tires: 27 in. dia., 105 psi	3.48	15.5	0.54	2.4	0.88	3.9	0.36
Aerodynamic Components (Fully Crouched) 	20-lb bike, 160-lb rider, tires: 27 in. dia., 105 psi	3.27	14.5	0.54	2.4	0.83	3.9	0.36
Partial fairing (Zipper, Crouched) 	21-lb bike, 160-lb rider, tires: 27 in. dia., 105 psi	2.97	13.2	0.54	2.4	0.70	4.1	0.38
Recumbent (Easy Racer) 	27-lb bike, 160-lb rider, tires: 20 in. front, 27 in. rear, 90 psi	2.97	13.2	0.94	4.2	0.77	3.8	0.35
Drafting (Closely Following Another Bicycle) 	20-lb bike, 160-lb rider, tires: 27 in. dia., 105 psi	1.94	8.63	0.54	2.4	0.50	3.9	0.36
Blue Bell (Two Wheels, One Rider) 	40-lb bike, 160-lb rider, tires: 20 in. front, 27 in. rear, 105 psi	0.61	2.7	0.8	4	0.12	5.0	0.46
Vector Single (Three Wheels) 	68-lb bike, 160-lb rider, tires: 24 in. front, 27 in. rear	0.51	2.3	1.02	4.54	0.11	4.56	0.424

Modified from "The Aerodynamics of Human Powered Land Vehicles" by A. C. Gross, C. R. Kyle, and D. J. Malewicki, Scientific American, vol. 249, no. 6, December 1983, pp. 142-152. With permission from the publisher.

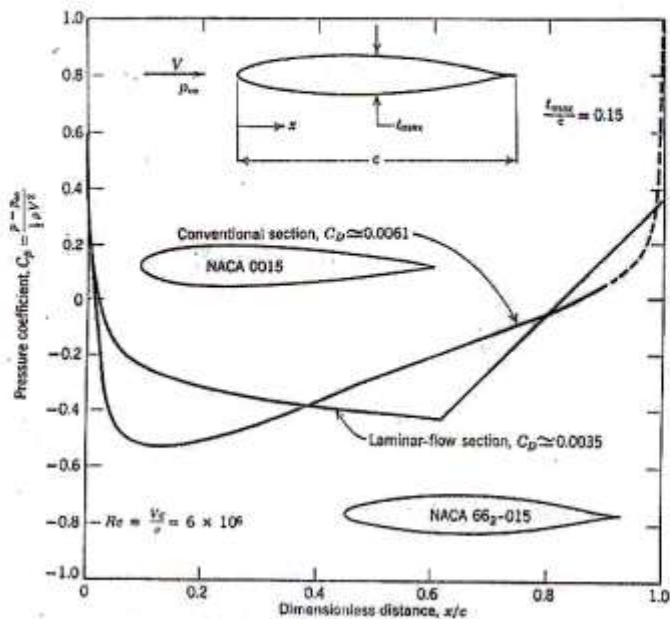
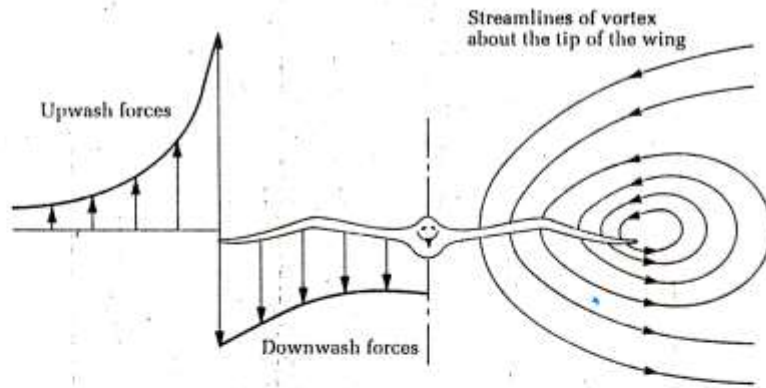
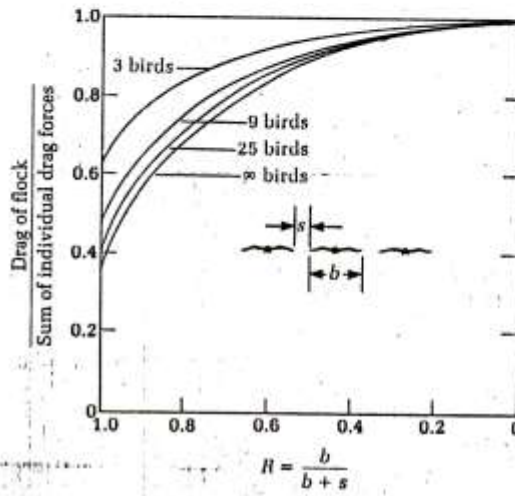


Fig. 9.15 Theoretical pressure distributions at zero angle of attack for two symmetric airfoil sections of 15 percent thickness ratio. (Data from [19].)

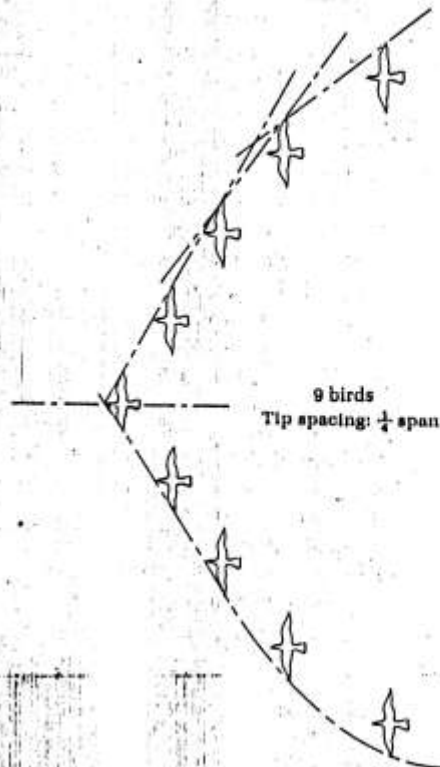
Flow field about a lifting wing of a bird as viewed in the downstream direction. (Information from P. B. S. Lissaman and C. A. Shollenberger, "Formation Flight of Birds," *Science* 168, no. 3934 (May 1970): 1003-1005. Copyright 1970 by the AAAS. Used with permission from the publisher).



Drag reduction by V-formation flight. (Information from P. B. S. Lissaman and C. A. Shollenberger, "Formation Flight of Birds," *Science* 168, no. 3934 (May 1970): 1003-1005. Copyright 1970 by the AAAS. Used with permission from the publisher).



for nine birds flying at a tip spacing equal to one-fourth of the span. (Information from P. B. S. Lissaman and C. A. Shollenberger, "Formation Flight of Birds," *Science* 168, no. 3934 (May 1970): 1003-1005. Copyright 1970 by the AAAS. Used with permission from the publisher).



پایان